515
L88e

Dr. Hans Lorenz

Einführung in die Elemente der höheren Mathematik und Mechanik

Berlin und München
Verlag von R. Oldenbourg

UNIVERSITY OF ILLINOIS
LIBRARY

Class
~~517~~
515

Book
L88e

Volume

MATHEMATICS
DEPARTMENT

F 11-20M

Einführung in die Elemente der höheren Mathematik und Mechanik

H. 107

Für den Schulgebrauch und zum Selbstunterricht

bearbeitet von

Dr. Hans Lorenz
Professor der Mechanik an der Technischen Hochschule zu Danzig

Mit 126 in den Text gedruckten Abbildungen

Berlin und **München**
Druck und Verlag von R. Oldenbourg
1910

515
L88e

Vorwort.

Zur Abfassung des vorliegenden Leitfadens wurde ich durch die Mitwirkung an einem Ferienkurs für Oberlehrer und einen mehrjährigen Verkehr mit solchen im Anschluß an das physikalische Kolloquium der Danziger Technischen Hochschule angeregt. Das kleine Buch enthält in durchaus elementarer, dem Verständnis des Primaners angepaßter Behandlung zunächst diejenigen Hauptlehren der analytischen Geometrie und Infinitesimalrechnung, welche nach meiner Erfahrung für den Beginn naturwissenschaftlicher sowie technischer Studien unentbehrlich sind und in den Lehrplan wenigstens der höheren Realanstalten Deutschlands (Realgymnasien, Oberrealschulen und technische Mittelschulen) Aufnahme finden sollten. Dieses Ziel bedingte eine scharfe Beschränkung und Konzentration des Stoffes; so wurde nicht nur die fast lediglich vom mathematischen Gesichtspunkte interessante Polarentheorie der Kegelschnitte weggelassen, sondern auch auf Konvergenz- und Restgliedbetrachtungen verzichtet. Derartige Gegenstände müssen ebenso wie das infinitesimale Verhalten von Funktionen mehrerer Veränderlichen mit der Differentialgeometrie von Flächen und Raumkurven und der Lehre von den Differentialgleichungen dem Hochschulunterrichte überlassen bleiben, dem unser Schriftchen nicht vorgreifen will.

Demgegenüber wurden an verschiedenen Stellen leicht verwendbare Näherungsverfahren abgeleitet und zahlreiche Übungsbeispiele auch geometrischer Natur eingeschaltet, während die Anwendungen auf die Mechanik mit Rücksicht auf die Vorbildung der Leser in einem besonderen Kapitel zusammengefaßt wurden. Dessen Studium dürfte im Anschluß an den Schul-

198175

unterricht zweckmäßig mit dem der Differential- und Integralrechnung parallel laufen. Daß ich mich hierbei in der Hauptsache auf ebene Bewegungsvorgänge beschränkt und einige für die Allgemeinbildung wichtige astronomische Probleme aufgenommen habe, dürfte wohl kaum Bedenken unterliegen.

Das Büchlein kann natürlich nirgends den Anspruch erheben, Neues zu bringen. Gewisse Abweichungen von der üblichen Darstellungsweise, die der Kenner leicht bemerkt, sind in der Unterrichtserfahrung des Verfassers begründet und tragen hoffentlich zur Erleichterung bei. Für eingehendere Studien, insbesondere eine strengere Begründung der vorgetragenen Lehren sei auf den bewährten Leitfaden von R. Fricke »Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung« (4. Aufl. 1905), zur weiteren Übung auf die bekannten Aufgabensammlungen von Dölp, Schlömilch u. a. verwiesen; zukünftige Ingenieure werden nach der Durcharbeitung unseres Buches Perrys »Höhere Analysis für Ingenieure«, deutsch von Süchting (2. Aufl. 1910), mit Nutzen zur Hand nehmen. Außerdem sei noch bemerkt, daß die im vorliegenden Leitfaden gebotene mathematische Grundlage zum Eindringen in des Verfassers mehrbändiges »Lehrbuch der technischen Physik«[1]) größtenteils ausreicht, da in diesem fast alle weitergehenden Sätze im Zusammenhang mit konkreten Problemen abgeleitet werden.

Zum Schlusse danke ich noch meinen Herren Assistenten, Privatdozent Dr.-Ing. A. Pröll und Dr.-Ing. R. Plank für ihre Hilfe beim Lesen der Korrektur sowie für die Anfertigung der Figuren. Ich würde mich freuen, wenn das Buch in Oberlehrerkreisen, welche mit mir die Aufnahme der Infinitesimalrechnung in den Lehrplan der höheren Schulen zur Vertiefung der Naturerkenntnis für notwendig erachten, Anklang finden sollte. Verbesserungsvorschläge von dieser Seite würde ich mit Dank entgegennehmen.

Danzig-Langfuhr, im September 1910.

H. Lorenz.

---

[1]) Bd. I, Techn. Mechanik starrer Systeme, 1902; Bd. II, Techn. Wärmelehre, 1904; Bd. III, Techn. Hydromechanik, 1910; Bd. IV, Techn. Mechanik elastisch-fester Körper in Vorbereitung.

Inhaltsverzeichnis.

Kap. I. Analytische Geometrie.

Seite

§ 1. Zusammenhang zwischen Gleichungen und Kurven . . . 1
§ 2. Die gerade Linie 7
§ 3. Der Kreis 13
§ 4. Polarkoordinaten und zyklometrische Funktionen . . 18
§ 5. Die Kegelschnitte 24
§ 6. Punkte, Gerade und Ebenen im Raume 40
§ 7. Flächen und Raumkurven 50

Kap. II. Differential- und Integralrechnung.

§ 8. Grundregeln der Differentiation 64
§ 9. Grundregeln der Integration 75
§ 10. Höhere Differentialquotienten und Potenzreihen . . 81
§ 11. Exponentialfunktionen und Logarithmen 86
§ 12. Kreis- und zyklometrische Funktionen 94
§ 13. Ausgezeichnete Funktionswerte 105
§ 14. Die Ermittlung des Volumens und der Oberfläche einfacher Körper 110

Kap. III. Elemente der Mechanik.

§ 15. Geschwindigkeit und Beschleunigung bei geradliniger Bewegung 116
§ 16. Geschwindigkeit und Beschleunigung bei krummliniger Bewegung 121
§ 17. Die Zentralbewegung 132
§ 18. Kraft und Masse 138
§ 19. Momente von Kräften, Kräftepaare und statische Momente 147
§ 20. Die Bewegung starrer Körper 158
§ 21. Die Arbeit 167

Kapitel I.
Analytische Geometrie.

§ 1. Zusammenhang zwischen Gleichungen und Kurven.

Die Algebra lehrt, daß zur Bestimmung zweier Unbekannten x und y stets zwei Gleichungen nötig sind. Liegt nur eine solche Gleichung zwischen x und y vor, so kann man über eine der beiden Unbekannten, z. B. x frei verfügen, d. h. ihr eine Folge beliebiger Werte erteilen, der dann nach Einsetzen in die vorgelegte Gleichung eine Reihe von Werten der anderen Unbekannten y entspricht. Die durch diese Gleichung verknüpften Unbekannten stellen demnach miteinander veränderliche Größen dar, von denen wir die eine, deren Wertfolge willkürlich angenommen wurde, als unabhängige, die andere hierdurch bestimmte dagegen als abhängige Veränderliche bezeichnen wollen. Die Abhängigkeit der Veränderlichen y von x selbst drücken wir dagegen durch den Begriff der Funktion von x aus und schreiben die nach y aufgelöste Gleichung allgemein in der Form

$$y = f(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

(gesprochen y gleich f von x), worin $f(x)$ irgend einen Ausdruck, in dem außer Konstanten nur die Veränderliche x vorkommt, bedeuten kann.

Zur geometrischen Veranschaulichung der Beziehung zwischen den beiden Veränderlichen tragen wir nunmehr in Fig. 1 eine Anzahl reeller Werte von x in irgendeinem Maßstabe auf einer

Geraden, der sog. Abszissenachse OX, von einem festen Anfangspunkte O aus derart ab, daß

$$OA_1 = x_1,\ OA_2 = x_2,\ OA_3 = x_3 \text{ usw.}$$

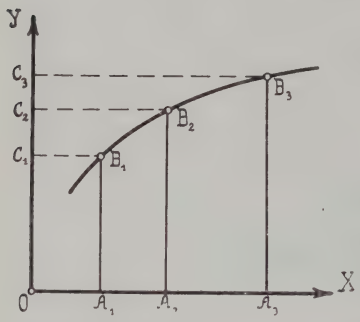

Fig. 1.

Errichten wir dann in den Enden dieser Strecken Lote, deren Länge durch die zugehörigen Werte von y gegeben ist, also

$$A_1B_1 = y_1 = f(x_1),$$
$$A_2B_2 = y_2 = f(x_2) \text{ usw.},$$

so werden die Punkte B einander um so näher liegen, je geringer die Unterschiede der aufeinander folgenden Werte der x ausfallen. Bei unmerklich werdenden Unterschieden der x werden schließlich die Punkte B eine stetige Kurve bilden, welche wir als eine geometrische Darstellung der Gleichung (1) bzw. der Funktion $f(x)$ ansprechen dürfen, während die Formel (1) als die Gleichung der Kurve Fig. 1 bezeichnet wird.

Es steht natürlich gar nichts im Wege, die vorgelegte Gleichung zwischen x und y nach der anderen Veränderlichen x aufzulösen, wodurch man an Stelle von (1)

$$x = F(y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

erhalten würde. In dieser sog. umgekehrten oder inversen Funktion von $f(x)$ erscheint jetzt y als unabhängige und x als abhängige Veränderliche derart, daß in Fig. 1 den Strecken

$$OC_1 = y_1,\ OC_2 = y_2,\ OC_3 = y_3 \text{ usw.}$$

auf der zur Abszissenachse OX normalen Ordinatenachse OY die Lote

$$C_1B_1 = x_1 = F(y_1),\ C_2B_2 = x_2 = F(y_2) \text{ usw.}$$

zugehören, ohne daß die Kurve $B_1B_2B_3 \ldots$ ihre Form ändert. Daraus geht hervor, daß auch die Formel (2) ohne weiteres als Gleichung der Kurve $B_1B_2B_3 \ldots$ angesehen und benutzt werden darf.

Durch das vorstehende Verfahren haben wir die Lage der einzelnen Punkte einer ebenen Kurve durch ihre Abstände von zwei zueinander senkrechten Achsen definiert, also auf ein recht-

winkliges Achsenkreuz bezogen. Die Abstände selbst nennen wir die Koordinaten des Punktes, und zwar die auf der X-Achse gemessenen die Abszissen, die auf der Y-Achse die Ordinaten, während der Schnittpunkt O der Achsen als Anfang des Koordinatensystems oder kurz als Koordinatenanfang bezeichnet wird.

Wenn wir den Koordinaten eines der Punkte B in Fig. 1 das positive Vorzeichen zuschreiben, so entsprechen dem Anfang O die Werte $x = 0$, $y = 0$. Die rückwärtige Verlängerung der Achsen über O hinaus führt dann folgerichtig auf negative Werte der Koordinaten, so daß das vollständige Achsenkreuz die Ebene in vier Quadranten (Fig. 2) derart teilt, daß beim Überschreiten einer Achse jedesmal eine der beiden Koordinaten ihr Vorzeichen wechselt. Weiterhin erkennt man, daß für alle Punkte der Abszissenachse OX, $y = 0$ und für alle Punkte der

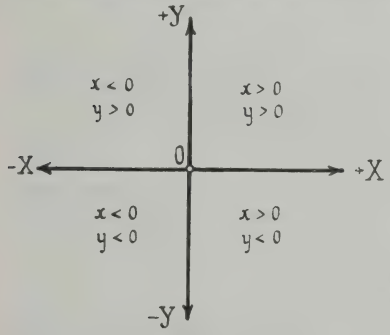

Fig. 2.

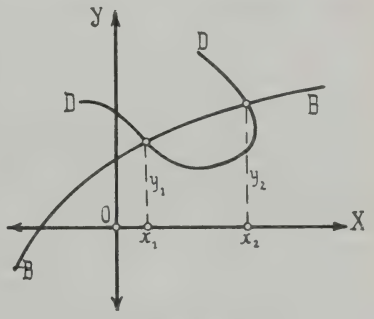

Fig. 3.

Ordinatenachse OY, $x = 0$ ist, so daß in unserem Koordinatensystem $y = 0$ die Gleichung der Abszissenachse OX und $x = 0$ die Gleichung der Ordinatenachse OY darstellt.

Sind nun zwei Gleichungen zwischen den beiden Unbekannten x und y, nämlich

$$y = f_1(x), \quad y = f_2(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

vorgelegt, so entsprechen diesen nach dem Vorstehenden auch zwei ebene Kurven, BB und DD (Fig. 3), die sich in einem oder mehreren Punkten schneiden werden. Da diese Schnittpunkte beiden Kurven zugleich angehören, also auch beide Gleichungen (3) erfüllen, so stellen ihre Koordinatenpaare $x_1\ y_1$

und $x_2\, y_2$ offenbar Wurzeln dieser Gleichungen dar. Die Anzahl solcher Wurzelpaare hängt im Falle algebraischer Gleichungen nur von dem Grade der durch Elimination einer Veränderlichen, z. B. von y aus (3), hervorgehenden Gleichung für die andere Veränderliche x

$$f_1(x) = f_2(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3\,a)$$

ab. Ist diese Gleichung von höherem als zweitem Grade, so bietet ihre algebraische Auflösung schon erhebliche Schwierigkeiten und wird im allgemeinen für höhere als vierte Grade sogar unmöglich. Demgegenüber lassen sich fast immer die beiden Kurven (3) leicht in ein Koordinatensystem eintragen, womit ihre Schnittpunkte ohne weiteres, und damit auch wenigstens die reellen Wurzelpaare mit einer nur durch die Strichdicke beschränkten Genauigkeit gegeben sind.

Dasselbe Verfahren läßt sich auch zur graphischen Lösung einer beliebigen Gleichung

$$f(x) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

anwenden, deren Wurzeln mit den Abszissen der Schnittpunkte der beiden Kurven

$$y = f(x), \quad y = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4\,a)$$

d. i. der durch die erste Gleichung $y = f(x)$ gegebenen Kurve mit der durch $y = 0$ definierten Abszissenachse OX, identisch sind.

1. Beispiel. Gegeben sei die Gleichung ersten Grades

$$y = x \operatorname{tg} \alpha + b, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

deren graphische Darstellung in Fig. 4 eine Gerade mit dem Neigungswinkel α ergibt, welche die Abszissenachse ($y = 0$) in dem Punkte $x = -\dfrac{b}{\operatorname{tg} \alpha} = -b \operatorname{cotg} \alpha$ und die Ordinatenachse ($x = 0$) im Punkte $y = +b$ schneidet. Die Umkehrung der Gleichung liefert die inverse Funktion

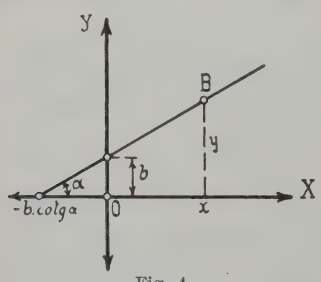

Fig. 4.

$$x = \frac{y - b}{\operatorname{tg} \alpha} = (y - b) \operatorname{cotg} \alpha, \quad . \quad (5\,a)$$

die ebenfalls eine Gleichung der Geraden B bedeutet.

2. Beispiel. Bezeichnen wir mit y den Druck eines Gases in Kilogramm auf ein Quadratmeter, mit x das Volumen von 1 Kilogramm

des Gases, gemessen in Kubikmetern, so ändern sich nach dem Boyle-Mariotteschen Gesetze diese Größen bei konstanter Temperatur nach der Gleichung

$$xy = C. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Wir erhalten also eine Kurve AB mit einem konstanten Inhalt C des aus der Abszisse und Ordinate jedes Punktes gebildeten Rechtecks, woraus sich sofort die in Fig. 5 angedeutete einfache punktweise Konstruktion der Kurve ergibt. Lösen wir die Gleichung nach y oder x auf, schreiben also

$$y = \frac{C}{x} \text{ oder } x = \frac{C}{y} \quad (6\,\text{a}),$$

so erkennen wir, daß die Funktion durch Umkehrung keine Änderung erleidet, oder daß wir, ohne die Lage der Kurve zu ändern, die beiden Koordinatenachsen miteinander vertauschen können. Weiter folgt aus diesen beiden Formeln für $x = 0$, $y = \infty$, bzw. für $y = 0$, $x = \infty$, d. h. die Kurve erreicht die beiden Achsen erst im Unendlichen. Schließlich ändert sich die Gleichung $xy = C$ auch nicht durch gleichzeitigen Vorzeichenwechsel beider Veränderlichen, so daß unserer Gleichung auch ein im Scheitelquadranten gelegener in Fig. 5 punktierter Kurvenzweig genügt, der mit dem ausgezogenen kongruent ist. Dieser Zweig besitzt übrigens keine physikalische Bedeutung für Gase.

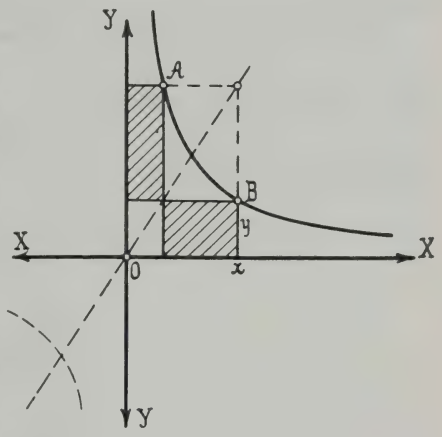

Fig. 5.

3. Beispiel. Trägt man die den beiden Gleichungen (5) und (6)

$$y = x \operatorname{tg} \alpha + b, \quad xy = C \ldots \ldots \quad (7)$$

entsprechenden Kurven Fig. 4 und 5 in ein und dasselbe Koordinatensystem ein, so ergeben die Koordinaten ihrer Schnittpunkte die Wurzeln des simultanen Gleichungspaares (7), die sich in diesem Falle auch leicht exakt berechnen lassen. Eliminiert man nämlich aus beiden Gleichungen die Veränderliche x, so folgt

$$y^2 - by = C \operatorname{tg} \alpha \quad \ldots \ldots \quad (7\,\text{a})$$

mit den beiden Wurzeln

$$y = +\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + C \operatorname{tg} \alpha}, \quad \ldots \ldots \quad (7\,\text{b})$$

denen dann die Werte

$$x = (y - b)\operatorname{cotg}\alpha = -\frac{b}{2}\operatorname{cotg}\alpha \pm \sqrt{\frac{b^2\operatorname{cotg}^2\alpha}{4} + C\operatorname{cotg}\alpha} \qquad (7\,c)$$

entsprechen. Wir erhalten also infolge der quadratischen Natur von (7 a) zwei Wurzelpaare im Einklang mit den beiden Schnittpunkten der Kurven.

4. Beispiel. Um die drei Wurzeln der kubischen Gleichung

$$x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

graphisch zu ermitteln, setze man in der Formel

$$y = x^3 - 5x^2 + 9x - 5 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8\,a)$$

der Reihe nach verschiedene Werte von x ein. Man erhält so die Koordinatenpaare

$$x = -3, \quad -2, \quad -1, \quad 0, +1, +2, +3 \text{ usw.},$$
$$y = -300, -41, -20, -5, \quad 0, +1, +4 \text{ usw.}$$

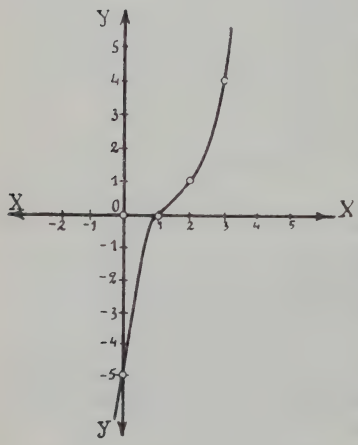

Fig. 6.

und erkennt, daß die der Gleichung (8a) entsprechende Kurve Fig. 6 die Abszissenachse in dem Punkte $x = 1$ schneidet, womit schon eine reelle Wurzel von (8) gegeben ist. Das stetige Ansteigen der Kurve mit wachsendem x deutet darauf hin, daß weitere Schnittpunkte mit der X-Achse nicht existieren, d. h. daß die beiden anderen Wurzeln von (8) konjugiert komplex sind. Zur Entscheidung dieser Frage setze man probeweise

$$x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = (x^2 + ax + b)(x - 1)$$

oder nach Ausführung der rechtsseitigen Multiplikation

$$x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = x^3 + (a - 1)x^2 + (b - a)x - b.$$

Die Identität beider Ausdrücke erfordert aber die Übereinstimmung der Faktoren der gleichen Potenzen von x auf beiden Seiten, woraus

$$a = -4, \quad b = +5$$

folgt. Die Auflösung der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 4x + 5 = 0$$

liefert schließlich das konjugiert komplexe Wurzelpaar

$$x = 2 \pm \sqrt{-1},$$

womit im Verein mit $x = 1$ alle Wurzeln von (8) gegeben sind.

Aus den bisherigen Betrachtungen geht hervor, daß man die rechnerische Behandlung von Gleichungen mit zwei Un-

bekannten durch geometrische Darstellungen ersetzen kann, solange wenigstens die vorgelegten Gleichungen nur reelle Konstanten enthalten. Daraus dürfen wir schließen, daß auch der umgekehrte Weg, d. h. der Ersatz geometrischer Konstruktionen durch analytische Rechnungen mit Gleichungen, welche aus den Eigenschaften geometrischer Gebilde abgeleitet sind, praktische Vorteile insbesondere dann verspricht, wenn es sich um die Aufdeckung allgemeiner Beziehungen handelt. Dieses von dem Franzosen Descartes (Cartesius), nach dem man wohl auch die rechtwinkligen Koordinaten als Cartesische bezeichnet, zuerst mit Erfolg angewandte Verfahren bildet in der Tat die Grundlage der sog. analytischen Geometrie, mit der wir uns zunächst beschäftigen wollen.

§ 2. Die gerade Linie.

Eine gerade Linie oder kurz eine Gerade ist in der Ebene vollständig bestimmt durch einen ihrer Punkte und die Neigung gegen eine feste Gerade, z. B. die Abszissenachse. Bezeichnen wir die Koordinaten dieses Punktes P_1 mit $x_1\, y_1$, diejenigen eines beliebigen Punktes P der Geraden mit $x\, y$ und ihren Neigungswinkel gegen die X-Achse mit α, so ist in dem Dreieck $P_1 P C$ (Fig. 7)

$$y - y_1 = (x - x_1) \operatorname{tg} \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

oder

$$y = y_1 - x_1 \operatorname{tg} \alpha + x \operatorname{tg} \alpha.$$

Hierin bedeutet aber (mit $x = 0$) $y_1 - x_1 \operatorname{tg} \alpha = b$ den Abschnitt OB der Geraden auf der Ordinatenachse, so daß wir an Stelle von (1) auch

$$y = x \operatorname{tg} \alpha + b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

als Gleichung der Geraden schreiben dürfen. Fällt die Konstante b weg, so haben wir es mit einer Geraden durch den Anfangspunkt O selbst zu tun, deren Gleichung somit

$$y = x \operatorname{tg} \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2\,a)$$

lautet.

Bezeichnen wir ferner den Abschnitt der Geraden auf der positiven Abszissenachse (für $y = 0$) mit a, so wird in Fig. 7 in dem Dreieck APD die Strecke $AD = x + a$, woraus sich die Proportion ergibt

$$\frac{y}{x+a} = \frac{b}{a}$$

oder

$$\frac{x}{-a} + \frac{y}{b} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

als eine dritte Form der Gleichung unserer Geraden, die sich durch ihren symmetrischen Bau auszeichnet und aus (2) durch Division mit b sowie mit $\frac{b}{\operatorname{tg} \alpha} = a$ unmittelbar hervorgeht.

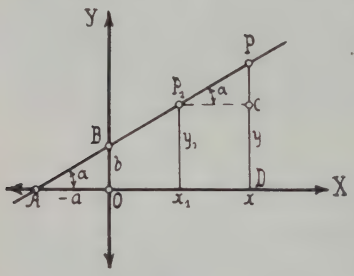

Fig. 7.

Würde der Punkt A rechts von O liegen, so hätten wir in (3) $-a$ durch $+a$ zu ersetzen, wodurch die Gleichung die Form

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad . \quad (3a)$$

annimmt.

Eine Gerade ist weiterhin auch bestimmt durch zwei ihrer Punkte P_1 und P_2 mit den Koordinaten $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$, welche die Gleichung erfüllen müssen. Benutzen wir hierfür die Form (2) so folgt

$$y_1 = x_1 \operatorname{tg} \alpha + b$$
$$y_2 = x_2 \operatorname{tg} \alpha + b$$

und daraus durch Subtraktion

$$y_1 - y_2 = (x_1 - x_2) \operatorname{tg} \alpha.$$

Dividieren wir diese Formel in Gl. (1), so erhalten wir als neue Gleichung der durch unsere zwei Punkte hindurchgehenden Geraden

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

die wir natürlich auch auf rein geometrischem Wege aus Fig. 7 hätten ableiten können.

Fällen wir nun in Fig. 8 vom Koordinatenanfang O aus ein Lot von der Länge l auf die Gerade vom Neigungswinkel α gegen die Abszissenachse und gleichzeitig ein solches AC vom Endpunkte A der Abzisse eines beliebigen Punktes P der Geraden, so wird dieses letztere Lot von einer Parallelen zur Geraden durch O im Punkte B getroffen und wir erhalten

$$l = BC = AC - AB$$

oder wegen

$$AC = y\cos\alpha,\quad AB = x\sin\alpha$$

auch

$$y\cos\alpha - x\sin\alpha = l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

als fünfte Gleichungsform. Diese läßt sich durch Division mit l sowie mit den Substitutionen

$$\frac{l}{\cos\alpha} = b,\quad \frac{l}{\sin\alpha} = a$$

sofort auf die Form (3) zurückführen bzw. aus dieser herleiten.

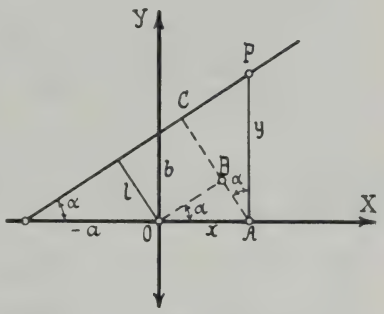

Fig. 8.

Alle bisher entwickelten Gleichungen der Geraden sind sowohl für die Abszisse x wie auch für die Ordinate y vom ersten Grade und können daher als Sonderfälle der allgemeinen Gleichung ersten Grades

$$Ax + By = C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

angesehen werden, worin A, B, C beliebige reelle Konstanten bedeuten. Schreiben wir diese Gleichung in der Form

$$y = -\frac{A}{B}x + \frac{C}{B} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6\,a)$$

so wird sie offenbar mit (2) identisch, wenn wir

$$-\frac{A}{B} = \operatorname{tg}\alpha,\quad \frac{C}{B} = b$$

setzen. Daraus geht hervor, daß nicht nur die Gerade durch Gleichungen ersten Grades befriedigt wird, sondern daß umgekehrt jede Gleichung ersten Grades zwischen zwei Veränderlichen eine Gerade darstellt und darum auch als lineare Gleichung bezeichnet wird.

Der Schnittpunkt zweier Geraden

$$\left.\begin{aligned} y &= x\operatorname{tg}\alpha_1 + b_1 \\ y &= x\operatorname{tg}\alpha_2 + b_2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

besitzt die Koordinaten

$$x = -\frac{b_2 - b_1}{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1},\quad y = \frac{b_1\operatorname{tg}\alpha_2 - b_2\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1} \qquad (7\,a),$$

welche für $\operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_2$, d. h. im Falle eines parallelen Verlaufes der Geraden unendlich werden.

Stehen die beiden Geraden (7) senkrecht zueinander, so ist $\alpha_2 = \alpha_1 + 90^0$, also

$$\operatorname{tg} \alpha_2 \operatorname{tg} \alpha_1 = -1$$

und wir erhalten für den Schnittpunkt die Koordinaten

$$x = (b_2 - b_1) \sin \alpha \cos \alpha; \quad y = b_1 \cos^2 \alpha_1 + b_2 \sin^2 \alpha_1 \quad (7b).$$

Bezeichnen wir die Entfernung zweier Punkte P_1 und P_2 mit den Koordinaten x_1 y_1 bezw. x_2 y_2 mit s (Fig. 9), so ist bei einem Neigungswinkel α der Geraden $P_1 P_2$

$$x_2 - x_1 = s \cos \alpha, \quad y_2 - y_1 = s \sin \alpha,$$

woraus

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

im Einklang mit dem Pythagoreischen Lehrsatz für das aus den Seiten $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ und s bestehende Dreieck hervorgeht.

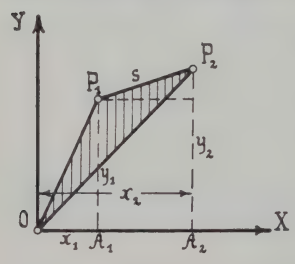

Fig. 9.

Die beiden Punkte P_1 und P_2 bestimmen aber auch mit dem Koordinatenanfang O ein Dreieck OP_1P_2, dessen Inhalt nach Fig. 9 sich zusammensetzt wie folgt

$$OP_1P_2 = OA_1P_1 + A_1P_1P_2A_2 - OA_2P_2.$$

Nach Einsetzen der Koordinaten der Eckpunkte P_1 P_2 berechnet sich hiermit die Dreieckfläche F zu

$$F = \frac{x_1 y_1}{2} + \frac{(x_2 - x_1)(y_2 + y_1)}{2} - \frac{x_2 y_2}{2}$$

woraus nach Kürzung

$$2F = y_1 x_2 - y_2 x_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

hervorgeht. Dieser Ausdruck ändert offenbar sein Vorzeichen, wenn man die Indizes 1 und 2 mit einander vertauscht, so daß man auch schreiben darf

$$OP_1P_2 = -OP_2P_1.$$

Das heißt aber nichts anderes, als daß das Vorzeichen unserer Dreieckfläche davon abhängt, ob wir seinen Umfang im Sinne des Uhrzeigers oder entgegengesetzt umfahren. Welchem der beiden Drehungssinne wir das positive Vorzeichen zuordnen wollen, bleibt zunächst unserem Ermessen anheimgestellt.

1. Beispiel. Um die Länge des Lotes l_1 von einem Punkte $x_0 y_0$ auf die Gerade von der Gl. (5)

$$y \cos \alpha - x \sin \alpha = l$$

zu ermitteln, brauchen wir nur durch den Punkt eine Parallele hinzuzuziehen, deren Abstand vom Anfang O mit l_0 bezeichnet werde. Alsdann ist

$$y \cos \alpha - x \sin \alpha = l_0$$

die Gleichung dieser Parallelen, der auch der Punkt $x_0\, y_0$ derart genügt, daß

$$y_0 \cos \alpha - x_0 \sin \alpha = l_0$$

gilt. Das gesuchte Lot l_1 ist nun offenbar nichts anderes als die Differenz $l_0 - l$, so daß wir dafür schreiben dürfen

$$l_1 = l_0 - l = y_0 \cos \alpha - x_0 \sin \alpha - l \ldots \quad (10).$$

2. Beispiel. Es seien die Koordinaten $x_1\, y_1$ des Fußpunktes des Lotes von einem Punkte $x_0\, y_0$ auf die Gerade

$$y = x \operatorname{tg} \alpha + b$$

anzugeben. Dieser Fußpunkt genügt einerseits der Gleichung dieser Geraden, so zwar daß

$$y_1 = x_1 \operatorname{tg} \alpha + b \ldots \quad (11),$$

während die Gleichung des durch $x_0\, y_0$ und $x_1\, y_1$ hindurchgehenden Lotes mit dem Neigungswinkel α_0

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \operatorname{tg} \alpha_0$$

ist. Die Bedingung für die Normalstellung zur vorgelegten Geraden lautet aber

$$\operatorname{tg} \alpha_0 \operatorname{tg} \alpha = -1$$

oder

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \operatorname{tg} \alpha = -1 \ldots \quad (12).$$

Für die Auflösung der beiden Gl. (11) und (12) nach x_1 und y_1 schreiben wir sie zweckmäßig in der Form

$$\begin{aligned} y_1 - x_1 \operatorname{tg} \alpha &= b \\ y_1 \operatorname{tg} \alpha + x_1 &= y_0 \operatorname{tg} \alpha + x_0 \end{aligned}$$

woraus sich schließlich ergibt

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= (y_0 - b) \sin \alpha \cos \alpha + x_0 \cos^2 \alpha \\ y_1 &= x_0 \sin \alpha \cos \alpha + b \cos^2 \alpha + y_0 \sin^2 \alpha \end{aligned}\right\} \ldots \quad (13).$$

3. Beispiel. Der Flächeninhalt eines Polygons mit den Eckpunkten $P_1 P_2 \ldots P_n$, deren Koordinaten bzw. $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $\ldots$ $x_n y_n$ sein mögen, ergibt sich durch Zusammensetzung aus den Dreiecken $O P_1 P_2$, $O P_2 P_3 \ldots O P_n P_1$ (Fig. 10), von denen das letzte im umgekehrten Sinne umfahren wird, wie die vorhergehenden. Diesem Umstand wird man indessen schon gerecht durch Summierung des Aus-

drucks (9) für die doppelte Fläche der Einzeldreiecke mit fortschreitenden Indizes, so daß wir schließlich erhalten

$$2F = \left\{ \begin{array}{l} y_1 x_2 - y_2 x_1 \\ + y_2 x_3 - y_3 x_2 \\ + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ + y_n x_1 - y_1 x_n \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

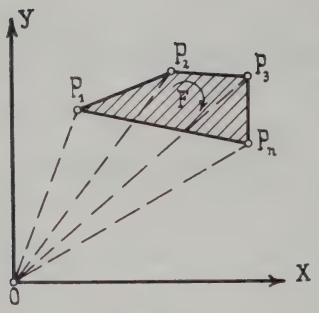

Fig. 10.

4. Beispiel. Nach dem vorigen Beispiel ist der doppelte Inhalt des durch die drei Punkte $P_1\ P_2\ P_3$ mit den Koordinaten $x_1\ y_1$, $x_2\ y_2$, $x_3\ y_3$ bestimmten Dreiecks

$$2\ F = \left\{ \begin{array}{l} y_1 x_2 - y_2 x_1 \\ + y_2 x_3 - y_3 x_2 \\ + y_3 x_1 - y_1 x_3 \end{array} \right\} \quad (14a)$$

Das Verschwinden dieses Ausdrucks liefert zugleich die Bedingung dafür, daß die drei Punkte $P_1 P_2 P_3$ auf einer Geraden liegen, nämlich

$$y_1 x_2 - y_2 x_1 + y_2 x_3 - y_3 x_2 + y_3 x_1 - y_1 x_3 = 0 \quad . \quad . \quad (15)$$

Diese Bedingung folgt auch aus Gl. (4), wenn wir dort $y = y_3$ und $x = x_3$ einsetzen und beiderseit die Nenner wegschaffen.

Das Verschwinden des Ausdrucks (14) für ein Polygon mit mehr als drei Seiten bedingt dagegen noch nicht, daß die Punkte $P_1 P_2 \ldots P_n$ auf einer Geraden liegen, sondern nur, daß beim Fortschreiten von einem Punkte zum nächsten in der obigen Reihenfolge die im positiven und negativen Sinne umfahrenen Flächenstücke sich ausgleichen. Dieser entgegengesetzte Drehungssinn ist natürlich nur möglich, wenn die Polygonseiten sich, wie in Fig. 11 angedeutet, kreuzen, wodurch bei vier Ecken ein sog. Vierseit $P_1 P_2 P_3 P_4$ entsteht im Gegensatze zu dem Viereck $P_1 P_2 P_4 P_3$.

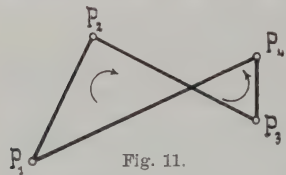

Fig. 11.

5. Beispiel. Der geometrische Ort eines Punktes $x\,y$, der von zwei anderen $x_1\ y_1$ und $x_2 y_2$ dieselbe Entfernung besitzt, ergibt sich durch Gleichsetzen der Abstandsquadrate

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2,$$

woraus nach Auflösung der Klammern und Kürzung der beiderseits gleichen Glieder

$$2(x_2 - x_1)\,x + 2(y_2 - y_1)\,y = (x_2^2 + y_2^2) - (x_1^2 + y_1^2) \quad . \quad (16),$$

d. h. die Gleichung einer Geraden resultiert, die, wie der Ver-

gleich mit Gl. (4) lehrt, auf der Verbindungslinie von $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ senkrecht steht und diese halbiert. Wir wollen diese Gerade als die mittlere Normale zu den Punkten $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ bezeichnen.

§ 3. Der Kreis.

Den geometrischen Ort aller Punkte in der Ebene mit gleichem Abstand oder Radius von einem vorgelegten festen Punkt, sog. Mittelpunkt oder Zentrum, bezeichnen wir als einen Kreis. Wählen wir im einfachsten Fall als Mittelpunkt den Koordinatenanfang O und bezeichnen mit a den Radius OP eines Kreispunktes P (Fig. 12), so erfüllen dessen Koordinaten $x\,y$ nach dem Pythagoreischen Lehrsatz die Gleichung

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad . \quad . \quad (1),$$

welche schon die Mittelpunktsgleichung des Kreises darstellt.

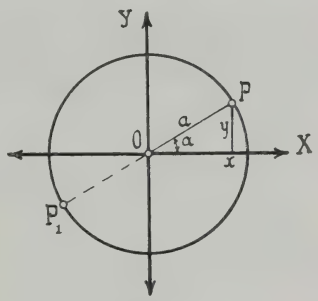

Fig. 12.

Schneiden wir den Kreis mit einer Geraden durch den Mittelpunkt O mit der Gl. (2a) des § 2, d. h.

$$y = x \operatorname{tg} \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

so ergibt sich nach Einsetzen in Gl. (1)

$$x^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = \frac{x^2}{\cos^2 \alpha} = a^2$$

oder umgekehrt

$$y^2 (1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha) = \frac{y^2}{\sin^2 \alpha} = a^2.$$

Dies führt auf zwei zusammengehörige Wertpaare

$$x = \pm a \cos \alpha, \quad y = \pm a \sin \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

für die Koordinaten mit entgegengesetzt gleichen Vorzeichen und liefert somit zwei auf der Schnittgeraden symmetrisch zum Anfang O liegende Punkte, deren Abstand $PP_1 = 2a$ einen Durchmesser des Kreises bildet.

Schneiden wir dagegen in Fig. 13 den Kreis um O mit einer beliebigen Geraden von der Gl. (1) des § 2, d. h.

$$y = x \operatorname{tg} \alpha + b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

so folgt durch Einsetzen in (1)

$$x^2(1+\operatorname{tg}^2\alpha)+2xb\operatorname{tg}\alpha=a^2-b^2$$

oder

$$x^2+2xb\sin\alpha\cos\alpha=(a^2-b^2)\cos^2\alpha,$$

woraus schließlich wegen

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$$

$$\left.\begin{aligned} x&=-\cos\alpha(b\sin\alpha\pm\sqrt{a^2-b^2\cos^2\alpha})\\ y&=b\cos^2\alpha\pm\sin\alpha\sqrt{a^2-b^2\cos^2\alpha}\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (5),$$

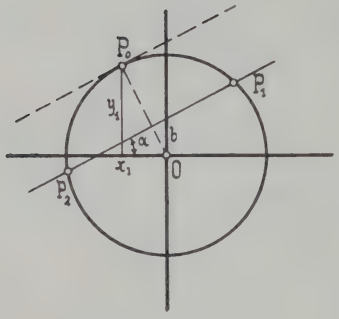

Fig. 13.

also wieder zwei Wertpaare für die Koordinaten sich ergeben, denen so lange zwei Schnittpunkte P_1 und P_2 entsprechen, als

$$a > b\cos\alpha \quad . \; . \quad (5a)$$

bleibt. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so werden die Ausdrücke konjugiert komplex. Alsdann existieren keine reellen Schnittpunkte und die Gerade läuft an dem Kreise vorbei.

Verschwindet aber die Differenz unter dem Wurzelzeichen, wird also $b^2\cos^2\alpha=a^2$, so fallen die beiden Werte für x bzw. y und damit auch die beiden Punkte P_1 und P_2 zu einem Punkte P_0 mit den Koordinaten

$$x_1=-b\sin\alpha\cos\alpha, \quad y_1=+b\cos^2\alpha \quad . \; . \quad (6)$$

zusammen, indem die in Fig. 13 punktierte Gerade (4) den Kreis berührt. Man bezeichnet sie in diesem Falle als die Tangente des Kreises im Punkte P_0 und pflegt ihre Konstanten b und α durch die Koordinaten $x_1\,y_1$ auszudrücken. Dividiert man nämlich die beiden Formeln (6) ineinander, so folgt zunächst

$$\frac{x_1}{y_1}=-\operatorname{tg}\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6a)$$

und nach Einführung in Gl. (4)

$$y=-\frac{x_1}{y_1}x+b.$$

Multipliziert man beiderseitig mit y_1 und beachtet, daß nach (6)

$$y_1 b=b^2\cos^2\alpha=a^2$$

ist, so vereinfacht sich die Gleichung der Kreistangente im Punkte $x_1\, y_1$ in

$$x x_1 + y y_1 = a^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

deren analoger Bau zur Mittelpunktsgleichung des Kreises in die Augen springt. Fällt der Mittelpunkt des Kreises nicht mit dem Koordinatenanfang zusammen, sondern besitzt er selbst die Koordinaten $x_0\, y_0$, so ist der konstante Abstand a eines Punktes $x\, y$ des Kreisumfanges nach Gl. (8) § 2 durch die Formel

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

definiert, welche mit den drei Konstanten x_0, y_0, a schon die allgemeine Kreisgleichung darstellt, und für $x_0 = a$, $y_0 = 0$, d. h. für eine Lage des Anfangspunktes O auf dem Kreisumfange selbst, während der Mittelpunkt M auf der X-Achse liegt, Fig. 14, in die sog. Scheitelgleichung

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2$$

oder

$$x^2 + y^2 = 2ax \quad . \quad . \quad (9)$$

übergeht. Diese unterscheidet sich von den anderen Formeln (1) und (8) vor allem dadurch, daß sie kein von den Veränderlichen freies Glied mehr enthält, sie hat mit ihnen jedoch den quadratischen Charakter gemein.

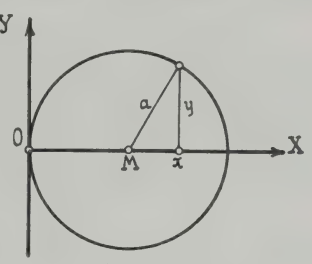

Fig. 14.

Sind zwei Kreise mit den Radien a_1 und a_2 und den Mittelpunktskoordinaten $x_1\, y_1$, sowie $x_2\, y_2$ vorgelegt, so lauten deren allgemeine Gleichungen nach (8)

$$\left.\begin{aligned}(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 &= a_1^2\\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 &= a_2^2\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

oder nach Auflösung der Klammern

$$\left.\begin{aligned}x^2 + y^2 - 2x_1 x - 2y_1 y + x_1^2 + y_1^2 &= a_1^2\\ x^2 + y^2 - 2x_2 x - 2y_2 y + x_2^2 + y_2^2 &= a_2^2\end{aligned}\right\} \quad (10a).$$

Diese beiden Formeln zusammen bestimmen offenbar die Koordinaten $x\, y$ des Schnittes der Kreise, für den sich auch durch Subtraktion

$$2(x_2 - x_1)\, x + 2(y_2 - y_1)\, y = a_1^2 - a_2^2 - x_1^2 + x_2^2 - y_1^2 + y_2^2 \quad (11),$$

also die Gleichung einer Geraden ergibt. Das heißt

aber nichts anderes, als daß wir den Schnitt zweier Kreise durch denjenigen eines Kreises mit einer Geraden ersetzen dürfen. Schreiben wir die Gleichung (11) in der Form

$$y = -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}\, x + \frac{a_1^2 - a_2^2}{2(y_2 - y_1)} - \frac{x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2}{2(y_2 - y_1)} \qquad (11a),$$

während die Verbindungsgerade der beiden Kreismittelpunkte nach Gl. (4) § 2 die Gleichung

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\, x + \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (12)$$

besitzt, so erkennen wir, daß beide Geraden senkrecht zueinander stehen, ein aus der Elementargeometrie bekannter Satz.

1. Beispiel. Um den geometrischen Ort aller Punkte P zu ermitteln, welche von zwei festen Punkten ein konstantes Abstandsverhältnis besitzen, verlegen wir den einen dieser Punkte in den Koordinatenanfang O, Fig 15. den andern C in die Abszissenachse im Abstande c davon und erhalten dann für die beiden Abstände eines Punktes P des geometrischen Ortes mit den Koordinaten x, y die Ausdrücke

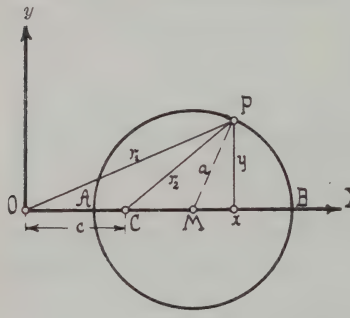

Fig. 15.

$$\left.\begin{aligned} r_1^2 &= x^2 + y^2 \\ r_2^2 &= (x - c)^2 + y^2 \end{aligned}\right\} \qquad (13).$$

Soll nun

$$\frac{r_2}{r_1} = \varepsilon \quad . \quad . \quad . \qquad (14)$$

sein, so folgt auch

$$(x - c)^2 + y^2 = (x^2 + y^2)\,\varepsilon^2 \quad . \qquad (15)$$

oder

$$x^2 + y^2 - \frac{2\,c\,x}{1 - \varepsilon^2} = -\frac{c^2}{1 - \varepsilon^2} \qquad (15a).$$

Fügen wir auf beiden Seiten den Bruch $\frac{c^2}{(1-\varepsilon^2)^2}$ hinzu, so dürfen wir auch hierfür schreiben

$$\left(x - \frac{c}{1 - \varepsilon^2}\right)^2 + y^2 = \frac{c^2\,\varepsilon^2}{(1 - \varepsilon^2)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (15b)$$

und erkennen, daß der gesuchte geometrische Ort ein Kreis ist mit dem Radius

$$a = \frac{c\,\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (16)$$

und dem Zentralabstand von O

$$x_0 = \frac{c}{1 - \varepsilon^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16\,a)$$

Die Schnittpunkte A und B des Kreises mit der Verbindungslinie der beiden Festpunkte OC, d. h. der Abszissenachse, ergeben sich aus (15) mit $y = 0$ als Wurzeln der Gleichung

$$(x - c)^2 = x^2 \varepsilon^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

mit den Werten

$$x = \frac{c}{1 \mp \varepsilon} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17a)$$

Man übersieht, daß für $\varepsilon = \pm 1$ eine dieser Wurzeln unendlich wird, während die andere in $x = \frac{c}{2}$ übergeht. Gleichzeitig aber wird auch nach (16) der Kreisradius $a = \infty$, so daß in diesem Falle der Kreis in eine Gerade senkrecht zur Linie OC entartet (vrgl. § 2, 5. Beispiel).

2. Beispiel. Die allgemeine Kreisgleichung (8) enthält drei Konstanten, nämlich $x_0\, y_0$ und a, deren Bestimmung naturgemäß auch drei Gleichungen voraussetzt. Daraus folgt sofort, daß zur Festlegung eines Kreises drei seiner Umfangspunkte mit den Koordinaten $x_1\, y_1$, $x_2\, y_2$, $x_3\, y_3$ genügen, deren Einführung in die Kreisgleichung die drei notwendigen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 &= a^2 \\ (x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 &= a^2 \\ (x_3 - x_0)^2 + (y_3 - y_0)^2 &= a^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

liefert. Schreiben wir dieselben nach Auflösung der Klammern in der Form

$$\left.\begin{aligned} x_0^2 + y_0^2 - 2\,x_1\,x_0 - 2\,y_1\,y_0 &= a^2 - (x_1^2 + y_1^2) \\ x_0^2 + y_0^2 - 2\,x_2\,x_0 - 2\,y_2\,y_0 &= a^2 - (x_2^2 + y_2^2) \\ x_0^2 + y_0^2 - 2\,x_3\,x_0 - 2\,y_3\,y_0 &= a^2 - (x_3^2 + y_3^2) \end{aligned}\right\} \quad (18\,a),$$

so können wir die Quadrate x_0^2, y_0^2 und a^2 leicht durch Subtraktion je zweier dieser Gleichungen entfernen und erhalten für die Ermittlung von $x_0\, y_0$ die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} 2\,(x_2 - x_1)\,x_0 + 2\,(y_2 - y_1)\,y_0 &= (x_2^2 + y_2^2) - (x_1^2 + y_1^2) \\ 2\,(x_3 - x_1)\,x_0 + 2\,(y_3 - y_1)\,y_0 &= (x_3^2 + y_3^2) - (x_1^2 + y_1^2) \end{aligned}\right\} \quad (18\,b).$$

Es sind dies für die Koordinaten $x_0\, y_0$ die Gleichungen zweier Geraden, und zwar nach Vergleich mit Gl. (16) § 2 der beiden mittleren Normalen zu $x_1\, y_1$, $x_2\, y_2$, sowie $x_1\, y_1$, $x_3\, y_3$, deren Schnitt demnach im Einklang mit einem bekannten Satze der elementaren Planimetrie den Kreismittelpunkt ergibt. Damit ist unser Problem auf den Schnitt zweier Geraden bzw. auf die Lösung zweier linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten zurückgeführt, die wir dem Leser ebenso überlassen können wie die Berechnung von a durch Einsetzen dieser Lösung in eine der drei Gleichungen (18).

§ 4. Polarkoordinaten und zyklometrische Funktionen.

Um die Länge s eines Kreisbogens AP zwischen der Abszissenachse und einem Punkte P mit den Koordinaten $x\,y$ anzugeben, führt man zweckmäßig in Fig. 16 den Winkel φ ein, den der Radius $OP = r$ mit der X-Achse bildet, und erhält dann, wenn π das Verhältnis des Halbkreisbogens zum Radius bedeutet, die Proportion

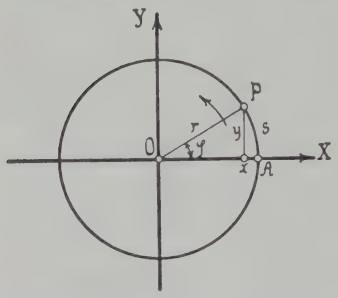

Fig. 16.

$$\frac{s}{r\,\pi} = \frac{\varphi^0}{180^0}$$

und daraus

$$\frac{s}{r} = \pi\,\frac{\varphi^0}{180^0} \quad . \quad . \quad (1).$$

Dieses Verhältnis der Kreisbogenlänge zum Radius bezeichnet man nun als den Bogen selbst und schreibt dafür arc. φ (sprich Arcus φ) oder kurz

$$\varphi = \pi\,\frac{\varphi^0}{180^0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

womit die Bogenlänge

$$s = r\,\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1b)$$

wird. Der Einheit des Bogens entspricht dann nach (1a) ein Winkel von

$$\varphi^0 = \frac{180^0}{\pi} = 57,_3{}^0, \text{ (genauer } 57^0\,17'\,45'')$$

während umgekehrt z. B.

den Winkeln $\varphi = 45^0 \quad 90^0 \quad 135^0 \quad 180^0$ usw.

die Bogen $\varphi = \frac{\pi}{4} \quad \frac{\pi}{2} \quad \frac{3}{4}\pi \quad \pi$ usw.

zugehören. Im Einklang damit schreibt man auch z. B.

$$\sin 45^0 = \sin\frac{\pi}{4}, \quad \sin(45 + \varphi)^0 = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) \text{ usw.},$$

wobei der Bogen als eine reine Zahl erscheint, die ebenso jeden beliebigen reellen Wert annehmen kann, wie die Zahl der Winkelgrade. Dabei ist nur zu beachten, daß für jede volle Umdrehung der Bogen um $2\,\pi$, der zugehörige Winkel um 360^0 zunimmt, so daß z. B. einem Bogen $\varphi = 12 = 2\,\pi + 5{,}717 = 4\,\pi - 0{,}566$

ein Winkel von $\varphi^0 = 360^0 + \frac{5{,}717 \cdot 180^0}{\pi} = 360^0 + 328^0 = 720^0 - 32^0$ entspricht.

Mit dieser neuen Schreibweise kann man sich dann den Flächeninhalt des Kreissektors OAP aus einer sehr großen Anzahl sehr kleiner, sog. Elementardreiecke zusammengesetzt denken, deren Höhe mit dem Radius r identisch ist, während ein kleiner Bruchteil Δs der Bogenlänge die Basis bildet. Dieser kleinen Bogenlänge entspricht dann nach (1b) der kleine Winkel $\Delta \varphi$ derart, daß die Fläche des Elementardreiecks

$$\Delta F = \frac{1}{2} r . \Delta s = \frac{r^2}{2} \Delta \varphi$$

und die Gesamtfläche des Kreissektors durch Summierung mit $\Sigma \Delta \varphi = \varphi$

$$F = \frac{r^2 \varphi}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

wird. Mit $\varphi = 2\pi$ folgt daraus die bekannte Formel für die ganze Kreisfläche

$$F = r^2 \pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2a).$$

Aus Gl. (2) erhellt weiter, daß das Vorzeichen der Sektorfläche von demjenigen des Bogens φ oder, mit andern Worten, vom Drehungssinne abhängt, wie wir schon bei der Betrachtung der Dreieckfläche in § 2 bemerkt haben. Rechnen wir nun den Bogen φ mit dem zugehörigen Winkel von der positiven Abszissenachse aus nach oben, wie es der Pfeil in Fig. 16 andeutet, positiv, so entspricht einer positiven Fläche ein dem Uhrzeiger entgegengesetzter Drehungssinn, womit zugleich die in § 2 noch erwähnte Willkür in der Wahl der Umfahrungsrichtung einer Fläche beseitigt ist.

Die Lage des Punktes P in Fig. 16 ist nun durch seinen Abstand r vom Koordinatenanfang O und die Neigung φ dieses sog. Fahrstrahls OP (auch »Radius Vektor« genannt) gegen die feste Gerade OX ebenso eindeutig bestimmt wie durch die beiden rechtwinkligen Koordinaten x und y, die mit r und φ durch die Gleichungen

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

verknüpft sind. Wir dürfen demnach die beiden Veränder-

lichen r und φ ebenfalls als Koordinaten in einem durch konzentrische Kreise um den als Pol bezeichneten Anfang O, sowie von ihm ausgehende Strahlen gebildeten Polarkoordinatensystem ansprechen. Die Gleichung eines dieser Kreise mit dem Radius r folgt durch Addition der Quadrate von (3) zu

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

woraus der stets positiv gerechnete Fahrstrahl sich zu

$$r = + \sqrt{x^2 + y^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4a)$$

ergibt, während wir das negative Zeichen vor der Wurzel als bedeutungslos unterdrücken. Der Bogen φ, also die zweite Koordinate in unserem neuen System, ist dann durch die beiden Gleichungen

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad . \quad . \quad (5)$$

bestimmt, deren Umkehrung man auch in der Form

$$\varphi = \operatorname{arc\,cos} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \operatorname{arc\,sin} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad . \quad (5a)$$

schreibt. Durch Division beider Gleichungen (3) erhält man schließlich

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{cotg} \varphi = \frac{x}{y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

oder umgekehrt analog (5a)

$$\varphi = \operatorname{arc\ tg} \frac{y}{x} = \operatorname{arc\,cotg} \frac{x}{y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6a).$$

Wir erhalten also durch Umkehrung der Kreisfunktionen sin, cos, tg, cotg vier neue sog. zyklometrische Funktionen, nämlich arcsin, arccos, arctg und arccotg (sprich Arcus-Sinus usw.). Wegen der Beziehungen

$$\sin \varphi = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \frac{y}{x}$$

dürfen wir aber auch umgekehrt schreiben

$$\varphi = \operatorname{arcsin} \frac{y}{r}, \quad \frac{\pi}{2} - \varphi = \operatorname{arccos} \frac{y}{r}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad \frac{\pi}{2} - \varphi = \operatorname{arccotg} \frac{y}{x},$$

woraus durch Addition

$$\left.\begin{aligned}\arcsin\frac{y}{r}+\arccos\frac{y}{r}&=\frac{\pi}{2}\\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\operatorname{arccotg}\frac{y}{x}&=\frac{\pi}{2}\end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ (7)$$

für den einfachen Zusammenhang der Funktionen arcsin und arctg mit den Komplementären arccos und arccotg folgt, der die Verwendung der beiden letzteren geradezu entbehrlich erscheinen läßt.

1. Beispiel. Die Gleichung der Geraden

$$y = x \operatorname{tg}\alpha + b$$

lautet in Polarkoordinaten nach Einführung der Ausdrücke (3)

$$r(\sin\varphi - \cos\varphi \operatorname{tg}\alpha) = b$$

oder nach Division mit r

$$\sin\varphi - \cos\varphi \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{r} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (8).$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ folgt daraus mit $\sin\frac{\pi}{2}=1$, $\cos\frac{\pi}{2}=0$, $r=b$, also der Abschnitt der Geraden auf der Y-Achse, während für $\varphi=\pi$, $\sin\pi=0$, $\cos\pi=-1$ sich der Abschnitt auf der X-Achse zu $r=b\operatorname{cotg}\alpha$ ergibt. Setzen wir schließlich in (8) $r=\infty$ ein, so wird hierfür $\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}\alpha$, d. h. die Parallele durch den Anfang O enthält die beiden Fahrstrahlen nach den unendlich fernen Punkten der Geraden.

2. Beispiel. Die Gleichung eines Kreises vom Radius a um den Mittelpunkt M mit den Koordinaten $x_0\,y_0$ (Fig. 17), also

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=a^2$$

geht mit (3) sowie der Substitution der Polarkoordinaten $r_0\,\varphi_0$ für den Kreismittelpunkt

$$x_0 = r_0\cos\varphi_0,\quad y_0 = r_0\sin\varphi_0$$

über in

$$(r\cos\varphi - r_0\cos\varphi_0)^2+(r\sin\varphi - r_0\sin\varphi_0)^2=a^2 \ . \ . \ (9),$$

oder nach Auflösung der Klammern

$$r^2+r_0^2-2\,r\,r_0(\cos\varphi\cos\varphi_0+\sin\varphi\sin\varphi_0)=a^2,$$

wofür wir auch mit

$$\cos\varphi\cos\varphi_0+\sin\varphi\sin\varphi_0=\cos(\varphi-\varphi_0)$$

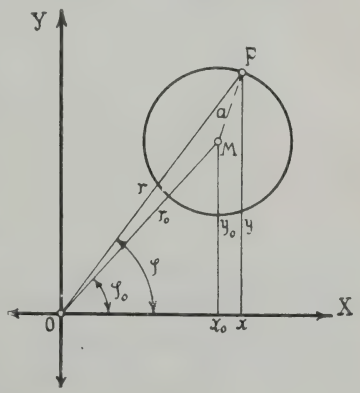

Fig. 17.

als allgemeine Kreisgleichung in Polarkoordinaten schreiben dürfen

$$r^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0) = a^2 - r_0^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9\,a).$$

Diese aus der Elementargeometrie bekannte Formel ergibt sich natürlich auch sofort aus der Betrachtung des Dreiecks OMP. Sie geht für $r_0 = 0$, d. h. für einen Kreis um O selbst über in

$$r = a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9\,b)$$

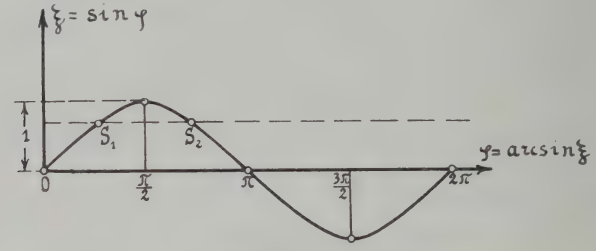

Fig. 18.

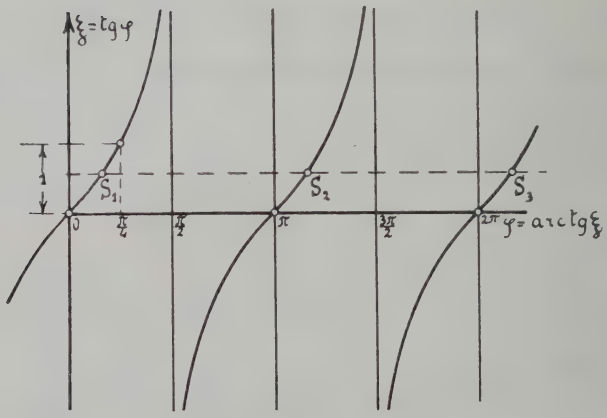

Fig. 19.

und stellt in dieser einfachsten Form die Mittelpunktsgleichung des Kreises in Polarkoordinaten dar.

3. Beispiel. Um über den Verlauf der zyklometrischen Funktionen Klarheit zu gewinnen, zeichne man zunächst die Kreisfunktionen

$$\xi = \sin\varphi \text{ und } \xi = \operatorname{tg}\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

in Fig. 18 und 19 auf Grund der bekannten Tabellen auf, deren Umkehrung

$$\varphi = \arcsin\xi, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10\,a)$$

damit unmittelbar gegeben ist, wenn wir die Ordinaten als unab-

hängige Veränderliche ansehen. Während nun jedem Bogen φ ein bestimmter Wert der Kreisfunktionen (10) zugeordnet ist, liefert die Konstruktion einer Parallelen zur φ-Achse eine unendliche Zahl von Schnitten $S_1 S_2 \ldots$ mit den Kurven, so daß die Funktionen arcsin und arctg unendlich vieldeutig sind. Weiterhin erkennt man, daß reelle Werte von arcsin ξ nur innerhalb des Intervalles $-1 < \xi < +1$ möglich sind, während für arctg ξ solche Grenzen nicht bestehen.

4. Beispiel. Rollt ein Kreis vom Radius a auf einer Geraden ab, ohne zu gleiten, so beschreibt jeder Punkt P seines Umfangs eine sog. Rollkurve oder gemeine Zykloide (Fig. 20), deren Gleichung wir ermitteln wollen. Wählen wir als Anfang O den Punkt der Geraden, mit dem P vorher in Berührung war, so ist der Bogen $PA = a\varphi$ mit dem Stück $OA = OC + CA = x + a \sin \varphi$ auf der Geraden identisch, während $PC = BA = y$ die Ordinate darstellt. Somit erhalten wir für die Koordinaten eines Rollkurvenpunktes

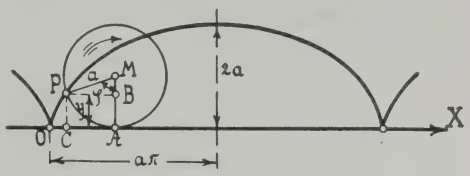

Fig. 20.

$$\left.\begin{aligned} y &= a\,(1 - \cos\varphi) \\ x &= a\,(\varphi - \sin\varphi) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11),$$

woraus sich die gesuchte Gleichung durch Elimination des Drehwinkels φ ergibt. Da nach der ersten Formel (11)

$$\cos\varphi = 1 - \frac{y}{a}$$

ist, so ist zunächst

$$\varphi = \arccos\left(1 - \frac{y}{a}\right) = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(1 - \frac{y}{a}\right)$$

und

$$\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \sqrt{\frac{y}{a}\left(2 - \frac{y}{a}\right)}.$$

Dies liefert in die zweite Formel (11) eingesetzt die gesuchte Gleichung

$$x = a\left(\arccos\left[1 - \frac{y}{a}\right] - \sqrt{\frac{y}{a}\left[2 - \frac{y}{a}\right]}\right) \quad \ldots \quad (12),$$

welche ersichtlich weniger bequem zu behandeln ist als die beiden Ausgangsformeln (11), mit denen man sich darum auch meistens begnügt. Die Rollkurve selbst, deren punktweise Konstruktion nach Einteilung des Rollkreisumfangs in gleiche Teile und Abtragen derselben auf der Geraden keine Schwierigkeiten bereitet, steigt, wie aus Fig. 20 erkennbar, von O aus steil an, erreicht nach Durchlaufen des Bogens $\varphi = \pi$ ihren höchsten Punkt mit der Ordinate $2a$ und fällt

dann wieder zur Geraden ab, worauf sich dieses Spiel beliebig oft wiederholt.

Etwas andere Kurven erhält man für Punkte innerhalb oder außerhalb des Rollkreises; ihre Konstruktion sowie die Aufstellung ihrer Gleichung nach vorstehendem Muster kann dem Leser als nützliche Übung empfohlen werden.

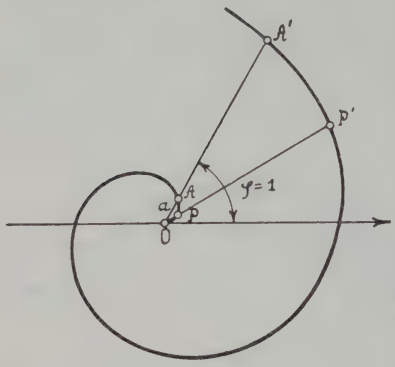

Fig. 21.

5. Beispiel. Kurven, deren Fahrstrahl r mit dem Bogen φ stetig zunimmt, heißen Spiralen, ihre einfachste Form (Fig. 21) mit Polargleichung

$$r = a\varphi \quad . \quad . \quad (13)$$

ist die archimedische Spirale. Sie beginnt im Koordinatenanfang O, erreicht im Punkte A für $\varphi = 1$ (d. h. bei 57,3°) den Radius a, nach einer vollen Umdrehung den Radius $2\pi a$ usf. Diese Länge stellt zugleich nach Gl. (13) die Differenz $AA' = PP'$ zweier aufeinander folgenden Radien auf einem und demselben Fahrstrahl dar, deren zugehörige Bogen sich um 2π unterscheiden.

Um die Gleichung dieser Spirale in rechtwinkligen Koordinaten anzugeben, braucht man nur auf die Formeln (3) bis (6) zurückzugreifen, nach denen

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ist, womit aus (13)

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14),$$

oder

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14\,a)$$

wird. Diese Gleichung ist offenbar weniger übersichtlich und bequem als die Polargleichung (13).

§ 5. Die Kegelschnitte.

Legen wir von einem Punkte O an einen Kreis mit dem Zentrum M zwei Tangenten und lassen die Figur um die Verbindungslinie OM rotieren, so entsteht ein Kegel mit einer eingeschriebenen Kugel, die sich in einem Kreise berühren (Fig. 22).

Daraus erkennt man sofort, daß alle Tangenten an die Kugel von einem Punkte aus dieselbe Länge besitzen. Schneiden wir nun den Kegel durch eine Ebene, welche die Kugel im Punkte F berührt, so wird diese Ebene diejenige des Berührungskreises in einer Geraden AB, den Kegelmantel dagegen in einer Kurve schneiden, die wir als einen Kegelschnitt bezeichnen wollen. Eine Normalebene zu der des Kegelschnitts durch OM wird daher das ganze Gebilde in zwei symmetrische Hälften teilen und daher auch senkrecht sowohl auf der Berührungskreisebene, als auch der Geraden AB stehen, so daß ihre Schnittgerade AC mit der Ebene des Kegelschnitts deren Berührungspunkt F mit der Kugel enthält. Anderseits schneidet diese Ebene diejenige des Berührungskreises in einer Geraden AD. Ziehen wir von O aus eine Parallele zu AC, welche die Gerade AD im Punkte E trifft und verbinden O mit einem Punkte P des Kegelschnitts, so schneidet die Gerade OP auf dem Kegelmantel den Berührungskreis in G und bestimmt mit OE eine Ebene, die ihrerseits die Kegelschnittsebene in der Geraden PB $//$ OE $//$ AC schneidet. Wegen der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke

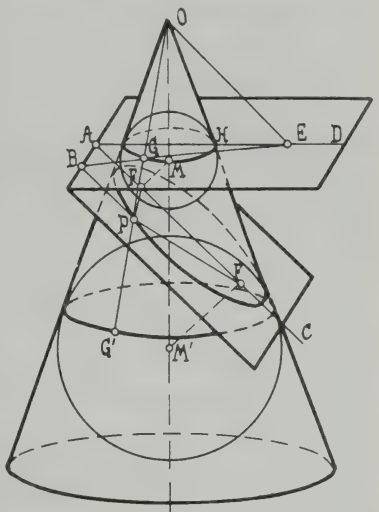

Fig. 22.

$$GPB \sim GEO$$

ist also

$$\frac{GP}{PB} = \frac{GO}{OE},$$

und, da wegen der Gleichheit der Kugeltangenten $GP = PF$ und $GO = OH$ ist, auch

$$\frac{PF}{PB} = \frac{OH}{OE}.$$

Das rechts stehende Verhältnis ist aber wegen der Gleichheit aller Kugeltangenten von O aus sowie wegen der Konstanz

von OE unabhängig von der Lage von P, so daß wir den Satz erhalten, daß alle Punkte eines Kegelschnitts von einem festen Punkte F, dem sog. Brennpunkt, und einer Geraden, der Direktrix, ein konstantes Abstandsverhältnis besitzen.

Bezeichnen wir nun für die analytische Untersuchung des Kegelschnitts dieses Abstandsverhältnis mit ε, den Abstand der Direktrix vom Brennpunkte F mit c und wählen den letzteren als Anfang eines Polarkoordinatensystems, dessen feste Achse mit der Normalen zur Direktrix durch F zusammenfällt, so zwar daß $PF = r$ und $\sphericalangle PFX = \varphi$ ist, so folgt mit $PF : PB = \varepsilon$ aus Fig. 23

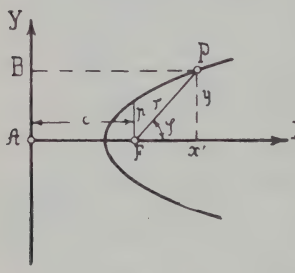

Fig. 23.

$$r = \varepsilon (c + r \cos \varphi)$$

oder

$$r (1 - \varepsilon \cos \varphi) = \varepsilon c.$$

Hierin wird aber für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ die Strecke $\varepsilon c = p$, der sog. Parameter des Kegelschnitts identisch mit der Ordinate im Brennpunkt, so daß wir auch

$$r (1 - \varepsilon \cos \varphi) = p \quad . \quad (1)$$

als Polargleichung eines Kegelschnitts für den Brennpunkt erhalten, in welcher der Fahrstrahl r unabhängig ist vom Vorzeichen von φ, so daß der Kegelschnitt zur Achse AFX symmetrisch liegt. Schreiben wir diese Gleichung in der Form[1])

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1\,a),$$

so erkennen wir, daß der Fahrstrahl $r = \infty$ wird für $\cos \varphi = \frac{1}{\varepsilon}$, eine Bedingungsgleichung, die nur erfüllbar ist, wenn $\varepsilon > 1$. Alsdann aber genügen dieser Bedingung stets zwei entgegen-

[1]) Setzt man, wie es häufig geschieht, $\sphericalangle AFP = \varphi' = 180^0 - \varphi$, so wird aus (1 a) mit $\cos \varphi = - \cos \varphi'$

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi'}$$

eine ebenfalls vielfach gebrauchte Form der Kegelschnittsgleichung.

gesetzt gleiche Winkel $\pm \varphi$ mit Fahrstrahlen nach zwei unendlich fernen Punkten. Für $\varepsilon = 1$ fallen diese beiden unendlich fernen Punkte auf der X-Achse zusammen, während im Falle $\varepsilon < 1$ jedem Werte von φ ein endlicher Fahrstrahl zugehört, so daß hierfür der Kegelschnitt eine geschlossene Kurve darstellt, welche für $\varepsilon = 0$ in den Kreis $r = p$ übergeht. Wir haben es also mit drei zur Achse AFX symmetrischen Formen von Kegelschnitten zu tun, die wir als Hyperbel ($\varepsilon > 1$), Parabel ($\varepsilon = 1$) und Ellipse ($\varepsilon < 1$) bezeichnen wollen. Wie aus der Proportion $OH : OE = \varepsilon$ in Fig. 22 hervorgeht, schließt im Falle der Hyperbel die Schnittebene mit der Kegelachse einen kleineren Winkel ein als jede Mantelgerade und wird daher auch noch den über O hinaus verlängerten Gegenkegel schneiden, woraus zwei sich ins Unendliche erstreckende Kurvenzweige resultieren. Im Falle der Parabel ist die Schnittebene parallel der Mantelgeraden, so daß diese Kurve auch als Übergang von der Hyperbel zur geschlossenen Ellipse, bei der die Schnittebene den Gegenkegel nicht mehr trifft, angesehen werden darf, während der Kreis als Normalschnitt zur Kegelachse und damit als Sonderfall der Ellipse erscheint.

Um die Gleichung des Kegelschnitts in rechtwinkligen Koordinaten $x'y$ mit demselben Anfang F aufzustellen, setzen wir in (1)

$$r = \sqrt{x'^2 + y^2}, \quad r \cos \varphi = x' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

und erhalten

$$\sqrt{x'^2 + y^2} = p + \varepsilon x'$$

oder quadriert und aufgelöst nach y

$$y^2 = (\varepsilon^2 - 1)\, x'^2 + 2\, p\, \varepsilon x' + p^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Dies ist schon die gesuchte Kegelschnittsgleichung in bezug auf den Brennpunkt, die indessen wenig übersichtlich erscheint, obwohl sie für $\varepsilon = 0$, d. h. für den Kreis in die Mittelpunktsgleichung

$$x'^2 + y^2 = p^2 = r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3\,a)$$

übergeht. Das heißt natürlich nichts anderes, als daß für den Kreis der Brennpunkt mit dem Zentrum und der Parameter mit dem Radius zusammenfällt.

Zu bequemeren Formen der Kegelschnittsgleichung gelangen wir durch Verschiebung des Koordinatenanfangs auf der Symmetrieachse um x_0, so zwar daß die neue Abszisse

$$x = x' - x_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

wird. Dies liefert eingesetzt in Gl. (3)

$$y^2 = (\varepsilon^2 - 1)\, x^2 + 2\,[\varepsilon p + (\varepsilon^2 - 1)\, x_0]\, x + p^2 + (\varepsilon^2 - 1)\, x_0^2 + 2\,\varepsilon p\, x_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3\,b).$$

Verlangen wir nun, daß die Gleichung analog der des Kreises (3a) rein quadratisch in beiden Veränderlichen wird, so muß das in x lineare Glied verschwinden, wodurch sich die noch unbestimmt gelassene Verschiebung x_0 des Koordinatenanfangs aus

$$\varepsilon p + (\varepsilon^2 - 1)\, x_0 = 0$$

zu

$$x_0 = \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4\,a)$$

berechnet. Setzen wir diesen Wert in (3b) ein, so erhalten wir

$$y^2 = (\varepsilon^2 - 1)\, x^2 + \frac{p^2}{1 - \varepsilon^2}$$

oder nach Vereinigung der veränderlichen Glieder auf einer Seite und Division mit $\frac{p^2}{1 - \varepsilon^2}$

$$\frac{x^2}{p^2}\,(1 - \varepsilon^2)^2 + \frac{y^2}{p^2}\,(1 - \varepsilon^2) = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Im Falle der Ellipse, d. h. für $\varepsilon < 1$ wollen wir zwei neue Längen a und b durch

$$\frac{p^2}{(1 - \varepsilon^2)^2} = a^2, \quad \frac{p^2}{1 - \varepsilon^2} = b^2, \quad p = \frac{b^2}{a} \quad . \quad . \quad (6)$$

einführen, womit die Ellipsengleichung die einfache Form

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

annimmt.

Lösen wir sie nach einer der beiden Veränderlichen auf, so wird

$$\frac{y}{b} = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \text{ und } \frac{x}{a} = \pm \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \quad . \quad (7\,a).$$

Wir erhalten also für jedes Wertpaar $\pm x$ zwei entgegengesetzt gleiche Werte von y und umgekehrt, allerdings mit den Einschränkungen

$$x^2 < a^2, \quad y^2 < b^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7\,b)$$

für reelle Lösungen von (7a), womit die Ellipse Fig. 24 in den Raum eines Rechtecks von den Seitenlängen $2a$ und $2b$ mit dem Anfang O als Mittelpunkt eingeschlossen ist. Infolge der aus (7a) hervorgehenden doppelten Symmetrie der Ellipse zum rechtwinkligen Achsenkreuz darf der Anfang auch als Mittelpunkt der Ellipse, die Formel (7) als deren Mittelpunktsgleichung angesprochen werden.

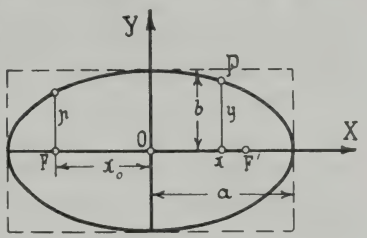

Fig. 24.

Die durch (4a) bestimmte Verschiebung $x_0 = OF$, für die wir nach (6) bzw. nach Elimination von

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6\,a)$$

auch

$$x_0 = \varepsilon a = \pm \sqrt{a^2 - b^2} < a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6\,b)$$

schreiben dürfen, stellt somit den Brennpunktsabstand von der Mitte dar, der nur so lange reell ist, als $a^2 > b^2$. Daher bezeichnet man auch a als die große, b als die kleine Halbachse der Ellipse, während x_0 die lineare Exzentrizität und ihr Verhältnis $x_0 : a = \varepsilon$ die numerische Exzentrizität genannt wird. Da ferner sich für x_0 aus (6b) zwei entgegengesetzt gleiche Werte ergeben, so muß die Ellipse auch zwei Brennpunkte besitzen, was schon aus ihrer Symmetrie um die Ordinatenachse folgt. Der zweite Brennpunkt F' ist übrigens, wie leicht bewiesen werden kann, mit dem Berührungspunkte der Kegelschnittsebene mit einer zweiten, dem Kegel Fig. 22 eingeschriebenen Kugel um M' identisch.

Würden wir für die Hyperbel, also für $\varepsilon > 1$, die Substitution (6) benutzen, so erhielten wir für die Größe b einen imaginären Wert, den wir dadurch vermeiden, daß wir jetzt

$$\frac{p^2}{(1 - \varepsilon^2)^2} = \frac{p^2}{(\varepsilon^2 - 1)^2} = a^2, \quad \frac{p^2}{\varepsilon^2 - 1} = b^2 \quad . \quad . \quad (8)$$

in Gl. (5) anführen, wodurch wir als Hyperbelgleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

erhalten. Daraus folgt analog (7a)

$$\frac{y}{b} = \pm\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}, \quad \frac{x}{a} = \pm\sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}} \quad . \quad (9\,a),$$

d. h. wieder eine zum Achsenkreuz doppelt symmetrische Kurve, so daß auch (9) als Mittelpunktsgleichung der Hyperbel bezeichnet werden darf. Der Verlauf dieser Kurve ist zunächst durch die Bedingung reeller Werte von y bestimmt, der nach der ersten Formel (9 a) auf

$$x^2 > a^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9\,b)$$

führt, so daß innerhalb eines Abstandes $\pm a$ zu beiden Seiten des Mittelpunktes keine reellen Kurvenpunkte existieren. Die beiden Punkte $x = \pm a$ heißen die Scheitel der Hyperbel. Aus (9 a) folgt weiterhin

$$\frac{y}{x} = \pm\frac{b}{x}\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2}{x^2}} \quad . \quad . \quad (9\,c),$$

womit zugleich der Tangens des Neigungswinkels einer Geraden durch O nach einem Hyperbelpunkte mit der Abszisse x bestimmt ist. Rückt dieser Punkt ins Unendliche, so wird für diesen Winkel α (Fig. 25)

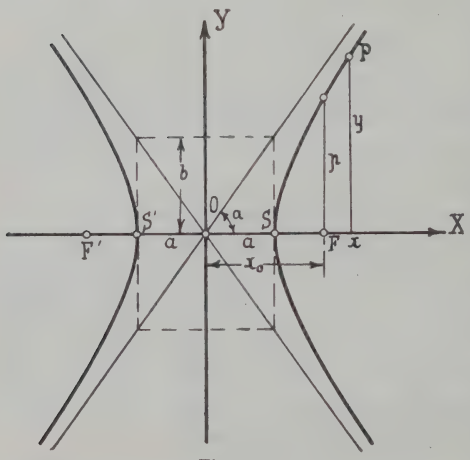

Fig. 25.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \pm\frac{b}{a} \quad (9\,d).$$

Dies sind aber die Gleichungen zweier Geraden durch den Anfang, welche die beiden Hyperbeläste einschließen und als Asymptoten bezeichnet werden. Sie bilden zugleich die Diagonalen eines Rechteckes aus den beiden sog. Hyperbelachsen $2a$ und $2b$, welches von den Hyperbelästen in den Scheiteln S und S' berührt wird. Eliminieren wir aus (8) die Brennpunktsordinate p, so folgt analog (6 a)

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8\,a),$$

und damit wird der Brennpunktsabstand (4a)

$$x_0 = \varepsilon a = \pm \sqrt{a^2 + b^2} > a \quad . \quad . \quad . \quad (8\,\text{b}).$$

Für die Hyperbel ist also im Gegensatze zur Ellipse keine der beiden Halbachsen der Größe nach von vornherein bevorzugt, so daß man die eine a als die Hauptachse, b dagegen als die Nebenachse bezeichnet. Schließlich sei noch bemerkt, daß wir auch hier zwei Brennpunkte erhalten, von denen der zweite F' den Berührungspunkt der Kegelschnittsebene mit einer zweiten Kugel im Gegenkegel in Fig. 22 bildet.

Für die Parabel werden mit $\varepsilon = 1$ sowohl die beiden Halbachsen a und b als auch der Abstand x_0 des Mittelpunktes vom Brennpunkt unendlich und daher die Mittelpunktsgleichung (5) überhaupt unbrauchbar. Diese Schwierigkeit entfällt aber, wenn wir den Koordinatenanfang O in einen Scheitel des Kegelschnitts verlegen, in dem alsdann gleichzeitig $x = 0$, $y = 0$ wird. Dies ist aber nur möglich, wenn die entsprechende Kegelschnittsgleichung kein konstantes Glied mehr enthält, d. h. wenn in (3b)

$$p^2 + (\varepsilon^2 - 1)\, x_0^2 + 2\,\varepsilon\, p\, x_0 = 0,$$

woraus sich der Scheitelabstand x_0 vom Brennpunkt F zu

$$x_0 = p \cdot \frac{\varepsilon \pm 1}{\varepsilon^2 - 1}$$

mit den beiden Werten

$$x_0' = -\frac{p}{1+\varepsilon}, \quad x_0'' = \frac{p}{1-\varepsilon} \quad . \quad . \quad (4\,\text{b})$$

ergibt. Jeder Kegelschnitt hat also im allgemeinen zwei Scheitel, die für den Fall der Hyperbel ($\varepsilon > 1$) auf einer und derselben Seite, bei der Ellipse ($\varepsilon < 1$) auf verschiedenen Seiten desjenigen Brennpunktes liegen, auf den sich die Polargleichung (1) bezieht, während bei der Parabel ($\varepsilon = 1$) der eine dieser Scheitel ins Unendliche rückt.

Verlegen wir nun den Koordinatenanfang in den dem Brennpunkt F zunächst liegenden Scheitel S, so müssen wir in (4b) den ersten Wert x_0' benutzen, der in die Formel (3b) eingesetzt die allgemeine Scheitelgleichung der Kegelschnitte

$$y^2 = 2\,p\,x + (\varepsilon^2 - 1)\, x^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

ergibt, welche mit $\varepsilon = 0$ sowie $p = a$ wieder in die Scheitelgleichung

des Kreises (4) des § 3 übergeht und sich für die Parabel mit $\varepsilon = 1$ in

$$y^2 = 2px \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

vereinfacht. Da hiernach $y = \pm\sqrt{2px}$, so existieren für jede Abszisse zwei Kurvenpunkte mit entgegengesetzt gleichen Werten der Ordinate, d. h. die Parabel liegt symmetrisch zur Abszissenachse OX (Fig. 26). Weiter folgt aus $\varepsilon = 1$, daß der Scheitel den Brennpunktsabstand AF von der Direktrix halbiert, und daß dieser Abstand selbst mit dem Parameter p übereinstimmt.

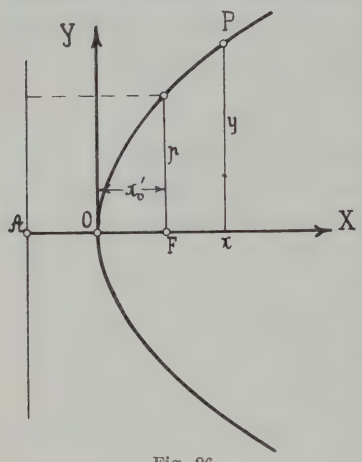

Fig. 26.

Vergleichen wir schließlich die verschiedenen Formen der Kegelschnittsgleichungen in rechtwinkligen Koordinaten untereinander, nachdem wir alle mit den Veränderlichen x und y behafteten Glieder auf eine Seite gebracht haben, so zeigt sich zunächst, daß alle diese Gleichungen quadratischer Natur sind, weiter daß für die Ellipse die beiden in x und y rein quadratischen Glieder stets dasselbe Vorzeichen und für den Kreis auch übereinstimmende Faktoren besitzen, während bei der Hyperbel diese rein quadratischen Glieder entgegengesetzte Vorzeichen haben. Die Parabelgleichung endlich enthält nur das Quadrat einer der beiden Veränderlichen, die andere dagegen allein in der ersten Potenz.

Infolge der doppelten Symmetrie der Ellipse und Hyperbel in bezug auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz mit dem Zentrum als Anfang (Fig. 27 und 28) besitzen diese Kurven nicht nur zwei Brennpunkte F_1 und F_2, sondern auch zwei Direktrices, welche die Hauptachse in den Punkten A_1 und A_2 normal schneiden. Bezeichnen wir nun die Abstände PF_1 und PF_2 eines Kurvenpunktes P von den Brennpunkten, die sog. Brenn-

strahlen, mit r_1 und r_2 sowie diejenigen PB_1 und PB_2 von den gleichgelegenen Direktrices mit x_1 und x_2, so gilt für beide Kurven

$$r_1 = \varepsilon\, x_1, \quad r_2 = \varepsilon\, x_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Ist weiter $A_1F_1 = A_2F_2 = c$ der Brennpunktsabstand von der zugehörigen Direktrix und $OF_1 = OF_2 = x_0$ die lineare Exzentrizität, so folgt für die Ellipse durch Addition von (12)

$$r_1 + r_2 = \varepsilon\,(x_1 + x_2) = 2\,\varepsilon\,(c + x_0)$$

oder unter Einführung des Parameters $p = \varepsilon c$ sowie mit Rücksicht auf Gl. (4a) und (6)

$$r_1 + r_2 = 2\,p\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\right) = \frac{2\,p}{1-\varepsilon^2} = 2\,a \quad (12a).$$

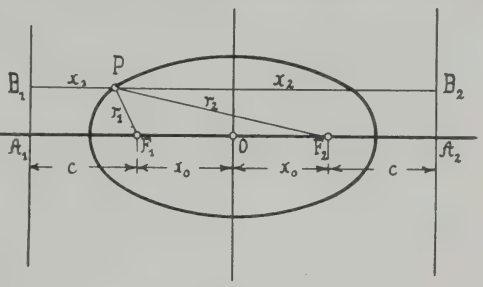

Fig. 27.

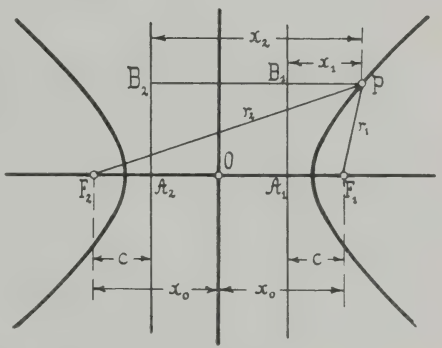

Fig. 28.

Für die Hyperbel dagegen ergibt sich durch Subtraktion der beiden Formeln (12)

$$r_2 - r_1 = \varepsilon\,(x_2 - x_1) = 2\,\varepsilon\,(x_0 - c).$$

Hierin ist, wenn x_0 eine positive Länge bedeuten soll, an Stelle von (4a) wegen $\varepsilon > 1$

$$x_0 = \frac{\varepsilon\, p}{\varepsilon^2 - 1}$$

zu setzen, so daß mit (8)

$$r_2 - r_1 = 2\,p\left(\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-1} - 1\right) = \frac{2\,p}{\varepsilon^2-1} = 2\,a \quad . \quad (12b)$$

wird. Wir erhalten also den Satz, daß bei der Ellipse die Summe der beiden Brennstrahlen, bei der Hyperbel deren Differenz konstant, und zwar gleich der ganzen Hauptachse, ist.

Dieser Satz, der eine bequeme punktweise Konstruktion beider Kegelschnitte erlaubt, wenn der Brennpunktsabstand $2x_0$ und die Hauptachse $2a$ vorgelegt ist, läßt sich auch leicht rein geometrisch aus Fig. 22 ableiten, da für die Ellipse die Summe der Brennstrahlen $PF + PF' = PG + PG' = GG'$, d. h. dem konstanten Abstand der beiden Kugelberührungskreise auf dem Kegelmantel ist, während bei der Hyperbel unter Hinzunahme der Kugel im Gegenkegel dieser Abstand mit der Differenz der Brennstrahlen übereinstimmt.

1. Beispiel. Da in der Mittelpunktsgleichung der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

sowohl $x^2 < a^2$, als auch $y^2 < b^2$ sein muß, so kann man auch wegen

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

$$x = a\cos\varphi, \quad y = b\sin\varphi \quad (13)$$

setzen, unter φ den Winkel eines Fahrstrahls vom Zentrum O aus verstanden (Fig. 29), der den Kreis über $2a$ im Punkte A, den über $2b$ in B schneidet. Alsdann ist die Projektion von OA auf die X-Achse $OC = x$, während $BD = PC = y$ wird, so daß man nur durch B eine Parallele, durch A eine Normale zur X-Achse zu ziehen hat, um mit deren Schnitt P einen Ellipsenpunkt zu erhalten.

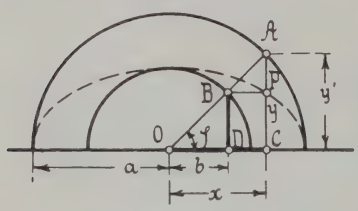

Fig. 29.

Es ist dies eine der bequemsten Konstruktionen der Ellipse, welche man auch wegen

$$\frac{PC}{AC} = \frac{y}{y'} = \frac{b}{a} = \cos\beta$$

durch Verkürzung aller Ordinaten y' eines Kreises vom Radius a im Verhältnis $b:a$, d. h. durch Parallelprojektion denselben auf eine um den Winkel β dagegen geneigte Ebene, entstanden denken kann (vgl. Fig. 30). Diese Tatsache gestattet übrigens die bequeme Übertragung einer Reihe von Sätzen über den Kreis, seine Tangenten und Sehnen auf die Ellipse, deren analytische Beweise viel umständlicher ausfallen.

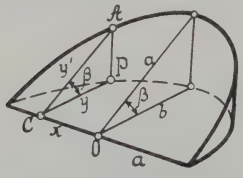

Fig. 30.

2. Beispiel. Schreibt man die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel in der Form

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2},$$

so erkennt man, daß, während $y^2 : b^2$ alle positiven Werte durchlaufen kann, jedenfalls $a^2 < x^2$ sein muß, so daß wir mit der bekannten Formel

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi} = 1 + \operatorname{tg}^2 \varphi$$

analog (13) in Fig. 31

$$\frac{a}{x} = \cos \varphi, \quad \frac{y}{b} = \operatorname{tg} \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

setzen dürfen. Hierin bedeutet wieder φ den Winkel eines Fahrstrahls mit der X-Achse, der die beiden in den Abständen a und b von O errichteten Lote in A bzw. B schneidet, so daß

$$OA = \frac{a}{\cos \varphi} = x, \quad BD = b \operatorname{tg} \varphi = y$$

ist. Schlagen wir dann mit OA um O einen Kreisbogen, so daß $OA = OC = x$ und errichten in C ein Lot auf der X-Achse, so wird dieses von einer Parallelen durch B in P getroffen, so daß $PC = BD = y$ wird. Mithin stellt P einen Punkt der Hyperbel dar, deren weiterer Verlauf in Fig. 31 ebenso punktiert angedeutet ist wie die Konstruktion des anderen Astes durch rückwärtige Verlängerung von OA.

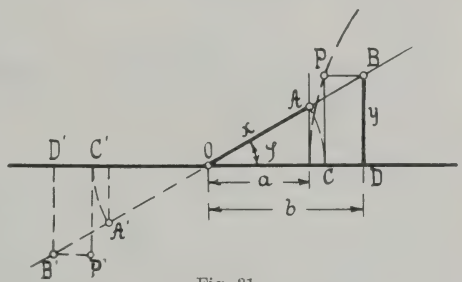

Fig. 31.

3. Beispiel. In der Parabelgleichung

$$y^2 = 2px$$

kann man die Ordinate auch als eine Kreisordinate ansehen, welche den dazu normalen Kreisdurchmesser $2p + x$ im Punkte O in die beiden Teile $2p$ und x zerschneidet (Fig. 32). Legt man diesen Kreisdurchmesser in die Abszissenachse OX, so stellt O den Parabelscheitel dar, während die Kreisordinate in diesem Punkte OB wegen $OS = x$ mit derjenigen $SP = y$ der Parabel übereinstimmt. Hieraus folgt ersichtlich eine sehr einfache punktweise Konstruktion der Parabel.

4. Beispiel. Verschieben wir den Anfang des Koordinatensystems, ohne die Achsenrichtung zu ändern, nach einem Punkte Ω mit den Koordinaten $x_0\, y_0$ und bezeichnen die Koordinaten eines beliebigen Punktes P in bezug auf die neuen Achsen (Fig. 33) mit ξ und η,

so besteht zwischen diesen und den ursprünglichen Koordinaten $x\,y$ die einfache Beziehung

$$x = \xi + x_0, \quad y = \eta + y_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

Nach deren Einführung in die Scheitelgleichung (10) der Kegelschnitte erhalten wir

$$(\eta + y_0)^2 = 2p\,(\xi + x_0) + (\varepsilon^2 - 1)\,(\xi + x_0)^2$$

oder nach Auflösung der Klammern

$$\eta^2 + (1 - \varepsilon^2)\,\xi^2 + 2\,\eta\,y_0 + 2\,\xi\,[(1 - \varepsilon^2)\,x_0 - p] + y_0^2 + (1 - \varepsilon^2)\,x_0^2 - 2\,p\,x_0 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15a),$$

also wieder eine quadratische Gleichung, die zwar allgemein in keiner der beiden neuen Veränderlichen $\xi\,y$ mehr rein quadratisch ist, in der

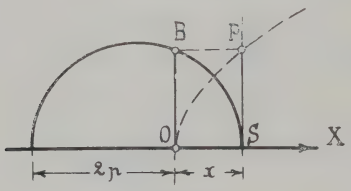

Fig. 32.

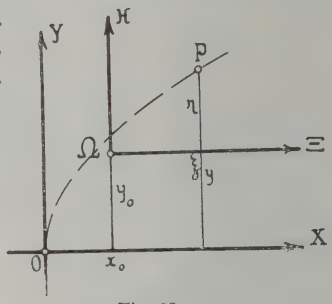

Fig. 33.

aber doch für den Fall der Ellipse ($\varepsilon < 1$), wie in deren Mittelpunktsgleichung beide Quadrate ξ^2 und η^2 dasselbe Vorzeichen besitzen, während dieses für die Hyperbel ($\varepsilon > 1$) verschieden ausfällt. Da außerdem für die Parabel ($\varepsilon = 1$) das mit ξ^2 behaftete Glied wie in deren Scheitelgleichung verschwindet, so erkennen wir, daß durch Parallelverschiebung des Koordinatensystems nicht nur der Grad der Kegelschnittsgleichung sondern auch die wesentlichen Unterscheidungsmerkmale (sog. Kriterien) für die einzelnen Kegelschnitte keine Änderungen erleiden. Daß man durch die Parallelverschiebung (15a) im Gegensatz zu der Scheitelgleichung ein konstantes Glied erhält, drückt — ohne die Kegelschnittsform zu berühren — nur aus, daß die Kurve im allgemeinen nicht durch den neuen Koordinatenanfang hindurchgeht.

5. Beispiel. Verdrehen wir dagegen das neue Koordinatensystem um den Winkel β gegen das ursprüngliche, ohne den Anfang O zu verschieben, so lassen sich nach Fig. 34 die ursprünglichen Koordinaten $x\,y$ durch Projektion mit Hilfe der punktierten Linien in den neuen derart ausdrücken, daß

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi\cos\beta - \eta\sin\beta \\ y &= \xi\sin\beta + \eta\cos\beta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16),$$

woraus durch Quadrieren und Addieren sofort

$$x^2 + y^2 = \xi^2 + \eta^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16\,a)$$

hervorgeht, womit nur die Gleichheit der Entfernung OP in beiden Achsenkreuzen ausgedrückt ist.

Wenden wir die Umformung (16) auf die Mittelpunktsgleichungen (7) und (9) der Ellipse und Hyperbel an, so geht die erstere über in

$$\xi^2\left(\frac{\cos^2\beta}{a^2} + \frac{\sin^2\beta}{b^2}\right) + \eta^2\left(\frac{\sin^2\beta}{a^2} + \frac{\cos^2\beta}{b^2}\right) + 2\,\xi\,\eta\sin\beta\cos\beta\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) = 1 \quad (17),$$

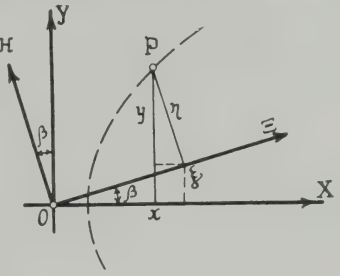

Fig. 34.

die letztere aber in

$$\xi^2\left(\frac{\cos^2\beta}{a^2} - \frac{\sin^2\beta}{b^2}\right) + \eta^2\left(\frac{\sin^2\beta}{a^2} - \frac{\cos^2\beta}{b^2}\right) - 2\,\xi\,\eta\sin\beta\cos\beta\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2}\right) = 1 \quad \ldots\ldots \quad (18).$$

Infolge der Drehung des Achsenkreuzes tritt also je ein Glied auf mit dem Produkte der beiden Veränderlichen, welches die doppeltsymmetrischen Mittelpunktsgleichungen beider Kurven nicht enthielten.

Im Sonderfalle des Kreises ist in Gl. (17) $b = a$ zu setzen, womit diese Formel unter Beachtung von $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$ sich vereinfacht in

$$\xi^2 + \eta^2 = a^2 \quad (17a),$$

d. h. die Mittelpunktsgleichung des Kreises wird durch Drehung des Achsenkreuzes nicht berührt. Dem Kreise analog ist der Fall der sog. gleichseitigen Hyperbel, in der ebenfalls $a = b$ ist, so daß ihre Mittelpunktsgleichung

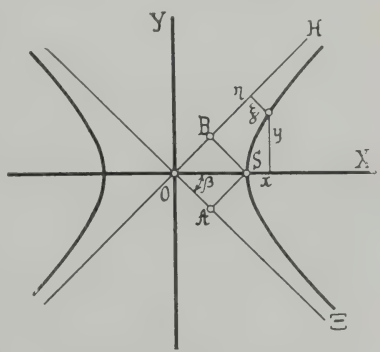

Fig. 35.

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18a)$$

lautet. Damit aber geht (18) über in

$$(\xi^2 - \eta^2)(\cos^2\beta - \sin^2\beta) - 4\,\xi\,\eta\sin\beta\cos\beta = a^2$$

oder wegen

$$\cos^2\beta - \sin^2\beta = \cos 2\beta, \quad 2\sin\beta\cos\beta = \sin 2\beta$$
$$(\xi^2 - \eta^2)\cos 2\beta - 2\xi\eta\sin 2\beta = a^2 \quad . \quad . \quad . \quad (18\,\text{b}).$$

Nach Gl. (9d) sind aber die Asymptoten der gleichseitigen Hyperbel gegen die Achsen um 45° geneigt. Drehen wir also unser Achsensystem gerade um diesen Winkel, setzen also $\beta = -45°$, so fallen die neuen Achsen mit den Asymptoten selbst zusammen (Fig. 35) und wir erhalten als sog. Asymptotengleichung der gleichseitigen Hyperbel aus (18b) mit $\cos 2\beta = 0$, $\sin 2\beta = -1$

$$\xi\eta = \frac{a^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18\,\text{c}).$$

Hierin bedeutet $\frac{a^2}{2}$ den Inhalt des Quadrates $OASB$, dessen Diagonale die halbe Hauptachse bildet. Man erkennt sofort, daß die gleichseitige Hyperbel mit der in § 1 im 2. Beispiel besprochenen Kurve, deren Konstruktion dort ebenfalls schon angegeben wurde, identisch ist.

6. Beispiel. Geht das neue Achsenkreuz $\xi\eta$ aus dem ursprünglichen schließlich durch gleichzeitige Verschiebung des Anfangspunktes Ω um $x_0 y_0$ und Drehung der Achsen um den Winkel β hervor (Fig. 36), so erhalten wir für diese sog. allgemeine lineare Transformation die Gleichungen

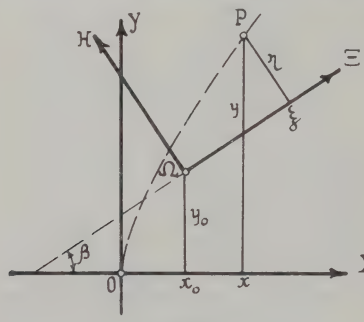

Fig. 36.

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \xi\cos\beta - \eta\sin\beta \\ y &= y_0 + \xi\sin\beta + \eta\cos\beta \end{aligned}\right\} \quad (19),$$

durch die drei neue Konstanten, nämlich $x_0 y_0$ und β eingeführt werden, welche mit den beiden Kegelschnittkonstanten p und ε für die Scheitelgleichung, bzw. a und b für die Mittelpunktsgleichung zusammen fünf Konstanten ergeben. Setzen wir z. B. die Formeln (19) in die Scheitelgleichung (10) ein und fassen alle Glieder mit gleichen Potenzen bzw. Produkten der Veränderlichen ξ und η zusammen, so ergibt sich die allgemeine Kegelschnittsgleichung von der Form

$$\eta^2 + A\xi^2 + B\xi\eta + C\xi + D\eta + E = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

mit ebenfalls fünf Konstanten $A\,B\,C\,D\,E$, deren Berechnung aus $p\,\varepsilon\,x_0\,y_0$ und β dem Leser überlassen werden kann. Um diese Konstanten eindeutig zu bestimmen, sind fünf Gleichungen der Form (20) mit fünf verschiedenen Wertpaaren $\xi\eta$ nötig, deren jedes einem bestimmten Punkt angehört. Daraus geht sofort hervor, daß ein Kegelschnitt im allgemeinen durch fünf Punkte gegeben ist.

Zum Schlusse sei noch der Spezialfall erwähnt, daß die Gleichung (20) in zwei Trinome von der Form

$$(\eta + a_1\,\xi + b_1)\;\;(\eta + a_2\,\xi + b_2) = 0 \;.\;.\;.\;. \quad (20\,a)$$

zerfällt werden kann, deren jedes für sich, gleich Null gesetzt, eine Gerade darstellt. Dies heißt natürlich nichts anderes, als daß der Kegelschnitt in diesem Fall in zwei Gerade ausartet, entsprechend dem Schnitt einer Ebene durch die Kegelspitze (Fig. 22).

7. Beispiel. Schreiben wir die allgemeine Kegelschnittsgleichung (20) in der Form

$$y^2 + A\,x^2 + B\,x\,y + C\,x + D\,y + E = 0 \;.\;.\;.\;. \quad (21),$$

so erkennen wir zunächst ihre Identität mit der allgemeinen Gleichung zweiten Grades mit zwei Unbekannten, welche somit einen Kegelschnitt ebenso darstellt wie die allgemeine Gleichung ersten Grades mit zwei Konstanten

$$y + M\,x + N = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (22)$$

eine Gerade. Die Verbindung beider Gleichungen (21) und (22) liefert alsdann, wie man sich sofort durch Elimination einer der Veränderlichen, z. B. y, überzeugen kann, im allgemeinen zwei Wertpaare für x und y, welche beiden Gleichungen genügen und daher, falls sie reell sind, die Koordinaten der Schnittpunkte der Geraden mit dem Kegelschnitte bestimmen, während konjugiert komplexe Wurzelpaare andeuten, daß die Gerade den Kegelschnitt nicht schneidet. Daraus folgt sofort der Satz, daß der Kegelschnitt von einer Geraden in höchstens zwei Punkten geschnitten werden kann. Fallen die beiden reellen Wurzeln der nach Elimination von y übrig bleibenden quadratischen Gleichung für x, deren Berechnung dem Leser überlassen bleiben möge, zusammen, so trifft dies auch für die Schnittpunkte des Kegelschnitts mit der Geraden zu, welche damit in eine Kegelschnittstangente übergeht. Wir werden später eine Methode kennen lernen, welche deren Gleichung sehr bequem zu ermitteln gestattet, so daß wir uns damit hier nicht aufzuhalten brauchen.

8. Beispiel. Die Koordinaten eines beliebigen Punktes P im Abstande r von einem Punkte P_0 mit den Koordinaten $x_0 y_0$ sind

$$x = x_0 + r\cos\varphi, \quad y = y_0 + r\sin\varphi \;.\;.\;.\;. \quad (23),$$

wenn φ den Neigungswinkel des Abstandes PP_0 mit der Abszissenachse bedeutet. Soll nun P auf einer Ellipse mit der Gl. (7) liegen, so wird nach Einsetzen von (23)

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 + 2r\left(\frac{x_0\cos\varphi}{a^2} + \frac{y_0\sin\varphi}{b^2}\right) + r^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right) = 0 \quad (23\,a).$$

Diese Gleichung liefert im allgemeinen zwei Werte für r, entsprechend zwei Schnittpunkten $P'P''$ der Geraden durch P_0 mit der Neigung φ.

Diese beiden Werte für r sind entgegengesetzt gleich, wenn die Gl. (23a) für r rein quadratisch wird, d. h. wenn

$$\frac{x_0 \cos\varphi}{a^2} + \frac{y_0 \sin\varphi}{b^2} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (24).$$

Dann aber halbiert der Punkt P_0 die Verbindungslinie $P'P''$ und die Gl. (24) stellt den geometrischen Ort der Halbierungspunkte aller solcher Verbindungslinien mit derselben Neigung gegen die Achsen dar. Da dies offenbar eine Gerade durch den Mittelpunkt ist, die wir als einen Durchmesser bezeichnen können, so erhalten wir daraus den Satz, daß die Halbierungspunkte aller parallelen Ellipsensehnen auf einem Durchmesser liegen. Mit dem zur parallelen Sehnenschar gehörigen Durchmesser bildet der halbierende zusammen ein sog. Paar konjugierter Durchmesser. Dem Leser wird es keine Schwierigkeit bieten, die vorstehende Betrachtung auf die Hyperbel und die Parabel auszudehnen.

§ 6. Punkte, Gerade und Ebenen im Raume.

Um einen Punkt P im Raume festzulegen, brauchen wir nur seinen Abstand von der Ebene unseres Koordinatensystems, d. h. die Länge z seines Lotes auf die XY-Ebene und in dieser die Koordinaten $OA = x$ und $OB = y$ selbst zu kennen (Fig. 37). Diesem Lote PP''' entspricht aber eine auf der XY-Ebene normale Z-Achse im Anfang O, welche mit den beiden anderen Achsen drei Ebenen, nämlich OXY, OYZ, OZX einschließt und so ein rechtwinkliges räumliches Koordinatensystem $OXYZ$ bildet. In diesem dürfen wir uns die Lage des Punktes P auch durch seine drei Abstände

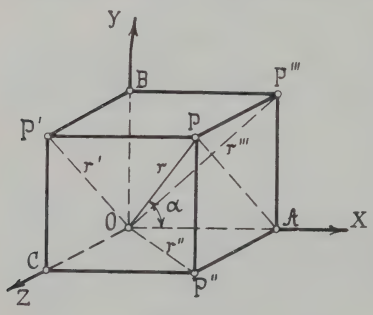

Fig. 37.

$$PP' = OA = x$$
$$PP'' = OB = y$$
$$PP''' = OC = z$$

gegeben denken, die für sich drei Ebenen $PP'P''$, $PP''P'''$, $PP'''P'$ festlegen, welche mit den Koordinatenebenen durch O das rechtwinklige Parallelepipedon $OABC\,PP'P''P'''$ begrenzen.

Setzen wir ferner die Diagonale dieses Parallelepipedons $OP = r$, so stellen $OP' = r'$, $OP'' = r''$, $OP''' = r'''$ ihre Pro-

jektionen auf die drei Koordinatenebenen und die Koordinaten xyz die Projektionen auf die drei Achsen dar, so zwar, daß

$$OP^2 = PP'^2 + OP'^2 = PP'^2 + OB^2 + OC^2 \text{ oder}$$
$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ist. Bezeichnen wir ferner die Winkel der Diagonale OP mit den drei Achsen OX, OY, OZ mit α, β, γ, so ist z. B. in dem bei A rechtwinkligen Dreieck OAP, $OA = OP \cos POX$ oder $x = r \cos \alpha$, so daß wir auch unter Hinzufügung der beiden anderen entsprechenden Beziehungen schreiben dürfen

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \cos \beta, \quad z = r \cos \gamma \quad . \quad . \quad (2).$$

Führen wir diese Ausdrücke in Gl. (1) ein und heben r^2 auf beiden Seiten weg, so bleibt die Beziehung

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

zwischen den drei Winkeln des Abstandes r vom Anfang mit den Achsen übrig, welche genau dem bekannten Satze $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ in der Ebene entspricht. Diese Beziehung (3) gestattet offenbar, einen der drei Winkel durch die beiden anderen auszudrücken, so daß die Richtung von OP schon durch zwei der Achsenwinkel bestimmt ist. Die Lage eines Punktes P selbst können wir uns daher an Stelle der Koordinaten xyz auch durch die Länge $OP = r$ und zwei der Achsenwinkel dieses Abstandes, z. B. $POZ = \gamma$ und $POY = \beta$ gegeben denken.

Sind zwei Punkte P_1 und P_2 durch ihre Koordinaten $x_1 y_1 z_1$ bzw. $x_2 y_2 z_2$ gegeben (Fig. 38), so ergeben sich zunächst ihre Abstände $OP_1 = r_1$ und $OP_2 = r_2$ vom Anfang O nach Gl. (1) zu

$$\left.\begin{aligned} r_1^2 &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \\ r_2^2 &= x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \end{aligned}\right\} \text{(1a).}$$

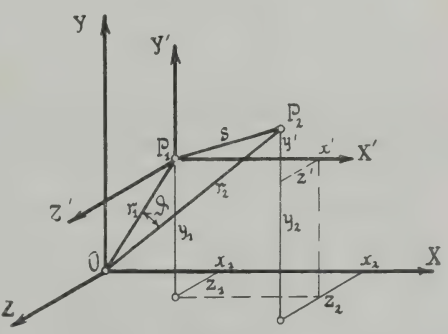

Fig. 38.

Zur bequemeren Berechnung ihres gegenseitigen Abstandes $P_1 P_2 = s$ legen wir durch den Punkt P_1 ein dem ursprünglichen paralleles Achsenkreuz $P_1 X' Y' Z'$, dessen entsprechende Ebenen von den ursprünglichen die mit den Ko-

ordinaten von P_1 identischen Abstände $x_1 y_1 z_1$ besitzen. In diesem neuen Parallelsystem sind nun die Koordinaten von P_2

$$x' = x_2 - x_1, \quad y' = y_2 - y_1, \quad z' = z_2 - z_1 \quad . \quad . \quad (4)$$

und die Entfernung $P_1 P_2$ folgt aus

$$s^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4\,a)$$

oder

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \quad . \quad . \quad (5).$$

Dafür dürfen wir aber auch schreiben mit Rücksicht auf (1 a)

$$s^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2\,(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) \quad . \quad (5\,a),$$

während wir auch in dem Dreiecke $O P_1 P_2$ mit dem Winkel $P_1 O P_2 = \vartheta$ haben

$$s^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos\vartheta$$

oder nach Abzug beider Formeln

$$r_1 r_2 \cos\vartheta = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \quad . \quad . \quad . \quad (5\,b).$$

Dividieren wir diese Gleichung mit $r_1 r_2$ und beachten, daß nach Gl. (2) die Neigungswinkel $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ und $\alpha_2 \beta_2 \gamma_2$ der Abstände r_1 bzw. r_2 durch

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= r_1 \cos\alpha_1, \quad y_1 = r_1 \cos\beta_1, \quad z_1 = r_1 \cos\gamma_1 \\ x_2 &= r_2 \cos\alpha_2, \quad y_2 = r_2 \cos\beta_2, \quad z_2 = r_2 \cos\gamma_2 \end{aligned}\right\} \quad (2\,a)$$

gegeben sind, so folgt aus (5 b) auch für den Neigungswinkel von r_1 zu r_2

$$\cos\vartheta = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 \quad (6).$$

Stehen die beiden Strecken r_1 und r_2 aufeinander senkrecht, so wird mit $\cos\vartheta = 0$

$$\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 = 0 \quad (6\,a),$$

während mit dem Zusammenfallen beider Strecken, d. h. für $\vartheta = 0$, $\cos\vartheta = 1$ die Gl. (6) in (3) übergeht.

Ersetzen wir nun den Punkt P_2 in Fig. 38 durch einen beliebigen Punkt P mit den Koordinaten $x y z$, so erhalten wir in dem System $P_1 X' Y' Z'$ an Stelle von (4)

$$x' = x - x_1, \quad y' = y - y_1, \quad z' = z - z_1 \quad . \quad (4\,b).$$

Sind ferner $\alpha\beta\gamma$ die Neigungswinkel der Strecke $P_1 P = s$ gegen die Achsen $P_1 X', P_1 Y', P_1 Z'$ und damit auch gegen die ihnen parallelen OX, OY, OZ, so erhalten wir analog (2)

$$x' = s\cos\alpha, \quad y' = s\cos\beta, \quad z' = s\cos\gamma \quad . \quad (2\,a),$$

oder

$$\frac{x'}{\cos\alpha} = \frac{y'}{\cos\beta} = \frac{z'}{\cos\gamma} = s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2\,\mathrm{b}).$$

Hierfür dürfen wir aber mit (4 b) auch schreiben

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma} = s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \frac{x - x_1}{\cos\alpha} &= \frac{y - y_1}{\cos\beta} \\ \frac{x - x_1}{\cos\alpha} &= \frac{z - z_1}{\cos\gamma} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7\,\mathrm{a}),$$

während die dritte Gleichung in (7) zwischen y und z sich durch Subtraktion dieser beiden ergibt. Ein beliebiger auf der Geraden durch den Punkt $x_1 y_1 z_1$ mit den Neigungswinkeln $\alpha\beta\gamma$ liegender Punkt erfüllt hiernach zwei voneinander unabhängige lineare Gleichungen zwischen den drei Veränderlichen xyz oder umgekehrt: zwei lineare Gleichungen zwischen den drei Koordinaten xyz bestimmen eine Gerade im Raume. Aus Fig. 39 erhellt weiterhin, daß die beiden Formeln (7 a) die Gleichungen der Projektionen $P_1''' P'''$ und $P_1'' P''$ der Geraden $P_1 P$ auf die XY- und XZ-Ebene darstellen, während die daraus hervorgehende dritte Formel

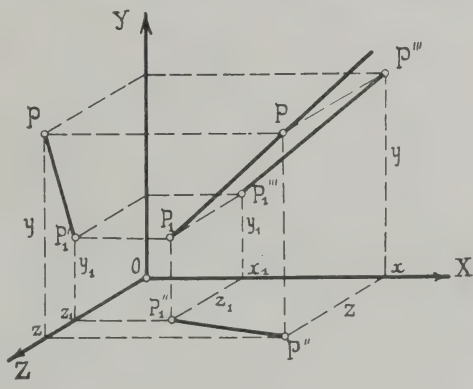

Fig. 39.

$$\frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma}$$

die Gleichung der dritten Projektion $P_1' P'$ auf die YZ Ebene liefert, die somit durch die beiden anderen Projektionen schon gegeben ist.

Schreibt man die Gleichungen (7 a) der Geraden in der Form

$$\left.\begin{aligned} y &= x\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} + \left(y_1 - x_1\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right) = \lambda x + b \\ z &= x\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} + \left(z_1 - x_1\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}\right) = \mu x + c \end{aligned}\right\} \quad (7\,\mathrm{b}),$$

so enthalten sie nur noch vier Konstanten, von denen die beiden ersten λ und μ die Richtung der Geraden bedingen. In der Tat folgt aus

$$\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \lambda, \quad \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} = \mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

durch Quadrieren und Addieren sowie mit Rücksicht auf Gl. (3)

$$\frac{\cos^2\beta + \cos^2\gamma}{\cos^2\alpha} = \frac{1 - \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \lambda^2 + \mu^2$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \cos^2\alpha &= \frac{1}{1+\lambda^2+\mu^2} \\ \cos^2\beta &= \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2+\mu^2} \\ \cos^2\gamma &= \frac{\mu^2}{1+\lambda^2+\mu^2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8\mathrm{a}).$$

Die vier Konstanten λ μ b c der Geraden Gl. (7a) erfordern nun zu ihrer Bestimmung wieder vier Gleichungen, von denen je zwei durch die Koordinaten eines Punktes erfüllt werden. Daraus geht aber hervor, daß eine Gerade im allgemeinen durch zwei ihrer Punkte festgelegt ist. Bezeichnen wir die Koordinaten dieser beiden Punkte mit $x_1 y_1 z_1$ bzw. $x_2 y_2 z_2$, so liefert deren Einführung in (7b)

$$\begin{aligned} y_1 &= \lambda x_1 + b, \quad y_2 = \lambda x_2 + b \\ z_1 &= \mu x_1 + b, \quad z_2 = \mu x_2 + b \end{aligned}$$

oder nach Abzug von (7b) und voneinander

$$\begin{aligned} y - y_1 &= \lambda(x - x_1), \quad y_2 - y_1 = \lambda(x_2 - x_1) \\ z - z_1 &= \mu(x - x_1), \quad z_2 - z_1 = \mu(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

woraus schließlich durch Division

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

als die Gleichung der Geraden durch beide Punkte folgt.

Zwei Gerade mit den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} y &= \lambda_1 x + b_1 \\ z &= \mu_1 x + c_1 \end{aligned}\right\} \text{ und } \left\{\begin{aligned} y &= \lambda_2 x + b_2 \\ z &= \mu_2 x + c_2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

werden sich im allgemeinen nicht schneiden, aber miteinander einen Winkel bilden, der mit demjenigen ihrer Parallelen durch den Anfang übereinstimmt. Die Gleichungen dieser Parallelen ergeben sich sofort aus (9) mit der Bedingung des gleichzeitigen Verschwindens der Koordinaten im Anfang, die auf den Wegfall der konstanten Glieder $b_1\ c_1\ b_2\ c_2$ führt, so zwar, daß

$$\left.\begin{aligned} y &= \lambda_1 x \\ z &= \mu_1 x \end{aligned}\right\} \text{ und } \left\{\begin{aligned} y &= \lambda_2 x \\ z &= \mu_2 x \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9a).$$

Der Neigungswinkel ϑ dieser beiden Geraden folgt dann sofort aus (6) unter Beachtung der Ausdrücke für die sog. Richtungskosinus, nämlich

$$\cos\vartheta = \frac{1 + \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2}{\sqrt{(1+\lambda_1^2+\mu_1^2)\ (1+\lambda_2^2+\mu_2^2)}} \quad . \quad (9b).$$

Stehen beide Geraden (9) bzw. (9a) aufeinander senkrecht, so wird mit $\vartheta = 90^0$ entsprechend (6a)

$$1 + \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9c).$$

Schneiden sich die beiden Geraden (9) in einem Punkte, so genügen dessen drei Koordinaten $x_0\ y_0\ z_0$ allen vier Gleichungen und können darum aus ihnen eliminiert werden. Dies führt auf die Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} \lambda_1 x_0 + b_1 &= \lambda_2 x_0 + b_2 \\ \mu_1 x_0 + c_1 &= \mu_2 x_0 + c_2 \end{aligned}$$

oder

$$x_0 = \frac{b_2 - b_1}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{c_2 - c_1}{\mu_1 - \mu_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10),$$

mit denen sich dann leicht die beiden anderen Koordinaten des Schnittpunktes durch Einsetzen in (9) berechnen.

Die Gleichung einer Geraden durch den Punkt $x_1\ y_1\ z_1$ mit den Neigungswinkeln φ, ψ, χ gegen die Achsen (Fig. 40) dürfen wir nach (7) auch in der Form

$$x - x_1 = s\cos\varphi, \quad y - y_1 = s\cos\psi, \quad z - z_1 = s\cos\chi \quad (7c)$$

schreiben, worin s wieder den mit den Koordinaten $x\,y\,z$ veränderlichen Abstand eines beliebigen Punktes der Geraden vom Punkte $x_1\,y_1\,z_1$ bedeutet. Verlangen wir nun, daß diese Gerade auf einer

durch die Achsenwinkel α, β, γ gegebenen Richtung senkrecht steht, so ist nach (6a)

$$\cos\varphi\cos\alpha + \cos\psi\cos\beta + \cos\chi\cos\gamma = 0,$$

woraus nach Einführung von (7c) unter Wegfall von s die Bedingungsgleichung

$$(x - x_1)\cos\alpha + (y - y_1)\cos\beta + (z - z_1)\cos\gamma = 0 \quad (11)$$

hervorgeht, der alle durch den Punkt $x_1 y_1 z_1$ hindurchgehenden Normalen zu einer Geraden mit den Achsenwinkeln $\alpha\beta\gamma$ genügen. Da nun alle diese Normalen auf einer Ebene liegen, so dürfen wir Gl. (11) auch als die Gleichung einer Ebene durch den Punkt $x_1 y_1 z_1$, welche auf der Geraden mit den Achsenwinkeln $\alpha\beta\gamma$ senkrecht steht, ansprechen.

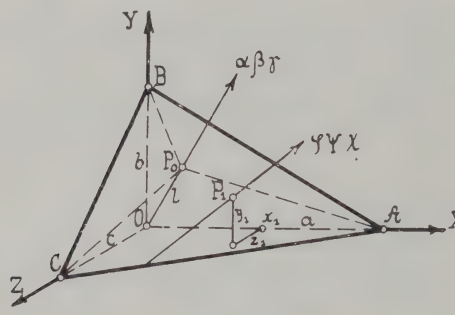

Fig. 40.

Der Gleichung (11) genügt natürlich auch der Fußpunkt P_0 des Lotes $OP_0 = l$ vom Anfang O auf die Ebene, dessen Koordinaten $x_0 y_0 z_0$ sein mögen, so zwar, daß

$$(x_0 - x_1)\cos\alpha + (y_0 - y_1)\cos\beta + (z_0 - z_1)\cos\gamma = 0$$

oder nach Abzug von (11)

$$(x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\cos\beta + (z - z_0)\cos\gamma = 0 \quad (11a)$$

ist. Da ferner nach (1) für dieses Lot

$$x_0 = l\cos\alpha, \quad y_0 = l\cos\beta, \quad z_0 = l\cos\gamma$$

oder nach Multiplikation bzw. mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ und Addition

$$x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma = l(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = l \quad (11b)$$

ist, so wird aus (11a) auch

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = l \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Diese sog. Normalgleichung der Ebene können wir noch weiter umformen durch Division mit l sowie durch Einführung der Abschnitte

$$OA = a, \quad OB = b, \quad OC = c$$

der Ebene ABC auf den Achsen, die sich aus den bei P_0 rechtwinkligen Dreiecken OP_0A, OP_0B, OP_0C zu

$$a = \frac{l}{\cos\alpha}, \quad b = \frac{l}{\cos\beta}, \quad c = \frac{l}{\cos\gamma}$$

berechnen. Damit geht (12) über in die Form

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13),$$

die mit (11) und (12) unter der allgemeinen Gleichung ersten Grades für drei Veränderliche

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

zusammengefaßt werden kann, welche somit eine Ebene im Raum darstellt. Da wir Gl. (14) stets durch eine der vier Koordinaten, z. B. D, dividieren können, solange diese nicht verschwindet, so ist in Wirklichkeit die Gleichung der Ebene durch die drei Verhältnisse $A:D$, $B:D$, $C:D$, also drei Konstanten bestimmt, deren Berechnung ebenso viele Gleichungen von der Form (14) mit verschiedenen Werten $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$, $x_3 y_3 z_3$ der Veränderlichen erfordert, die nichts anderes als die Koordinaten dreier verschiedener Raumpunkte bedeuten. Somit ist eine Ebene im Raum durch drei ihrer Punkte eindeutig bestimmt.

1. Beispiel. Das Lot von einem Punkte x_0, y_0, z_0 auf die Gerade

$$y = \lambda_1 x + b_1, \quad z = \mu_1 x + c_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

habe die Gleichung

$$y = \lambda_2 x + b_2, \quad z = \mu_2 x + c_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

oder

$$y - y_0 = \lambda_2 (x - x_0), \quad z - z_0 = \mu_2 (x - x_0) \quad . \quad . \quad . \quad (16\,a),$$

so daß die Konstanten b_2 und c_2 durch

$$b_2 = y_0 - \lambda_2 x_0, \quad c_2 = z_0 - \mu_2 x_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16\,b)$$

gegeben sind. Da die beiden Geraden (15) und (16) einander schneiden, muß nach Gl. (10)

$$\frac{b_2 - b_1}{c_2 - c_1} = \frac{y_0 - \lambda_2 x_0 - b_1}{z_0 - \mu_2 x_0 - c_1} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\mu_2 - \mu_1}$$

oder

$$\mu_2 (y_0 - b_1 - \lambda_1 x_0) - \lambda_2 (z_0 - c_1 - \mu_1 x_0) = \mu_1 (y_0 - b_1) - \lambda_1 (z_0 - c_1) \quad (17)$$

und wegen der Normalstellung der Geraden zueinander nach Gl. (9 c)

$$\mu_2 \mu_1 + \lambda_1 \lambda_2 = -1$$

sein. Aus diesen beiden Formeln berechnet sich λ_2 und μ_2, womit nach Einsetzen in (16a) die Gleichungen des Lotes vollständig gegeben sind.

2. Beispiel. Die Achsenwinkel φ, ψ, χ einer Normalen zu zwei anderen Geraden mit den Achsenwinkeln $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ erfüllen gleichzeitig die Bedingungen

$$\cos\varphi\cos\alpha_1 + \cos\psi\cos\beta_1 + \cos\chi\cos\gamma_1 = 0$$
$$\cos\varphi\cos\alpha_2 + \cos\psi\cos\beta_2 + \cos\chi\cos\gamma_2 = 0$$

oder

$$\frac{\cos\varphi}{\cos\chi}\cos\alpha_1 + \frac{\cos\psi}{\cos\chi}\cos\beta_1 = -\cos\gamma_1$$
$$\frac{\cos\varphi}{\cos\chi}\cos\alpha_2 + \frac{\cos\psi}{\cos\chi}\cos\beta_2 = -\cos\gamma_2$$

woraus

$$\frac{\cos\varphi}{\cos\chi} = \frac{\cos\beta_1\cos\gamma_2 - \cos\beta_2\cos\gamma_1}{\cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\alpha_2\cos\beta_1}$$
$$\frac{\cos\psi}{\cos\chi} = \frac{\cos\gamma_1\cos\alpha_2 - \cos\gamma_2\cos\alpha_1}{\cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\alpha_2\cos\beta_1}$$

hervorgeht. Quadrieren und addieren wir diese Ausdrücke und beachten die Beziehung

$$\cos^2\varphi + \cos^2\psi + \cos^2\chi = 1$$

so folgt mit der Abkürzung

$$\Delta^2 = (\cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\alpha_2\cos\beta_1)^2 + (\cos\beta_1\cos\gamma_2 - \cos\beta_2\cos\gamma_1)^2 + (\cos\gamma_1\cos\alpha_2 - \cos\gamma_2\cos\alpha_1)^2$$

schließlich

$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi &= \frac{1}{\Delta}(\cos\beta_1\cos\gamma_2 - \cos\beta_2\cos\gamma_1)\\ \cos\psi &= \frac{1}{\Delta}(\cos\gamma_1\cos\alpha_2 - \cos\gamma_2\cos\alpha_1)\\ \cos\chi &= \frac{1}{\Delta}(\cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\alpha_2\cos\beta_1)\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (18).$$

Schneiden sich die beiden Geraden mit den Richtungswinkeln $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ in dem Punkte $x_0 y_0 z_0$, so bestimmen sie eine Ebene mit der Gleichung analog (11)

$$(x - x_0)\cos\varphi + (y - y_0)\cos\psi + (z - z_0)\cos\chi = 0,$$

in die wir nur noch die Werte (18) einzusetzen haben.

Schneiden sich die beiden Geraden nicht, so berechnet sich mit Hilfe der Richtungswinkel (18) und zweier Bedingungsgleichungen (9c) die Gleichung des gemeinsamen Lotes beider Geraden, die der Leser für sich ermitteln möge.

3. Beispiel. Zur Berechnung der Länge des Lotes l_1 von einem Punkte $x_0 y_0 z_0$ auf die Ebene

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12),$$

in der l das Lot vom Koordinatenanfang O aus bedeutet, denken wir uns durch den gegebenen Punkt eine Parallelebene zu (12) gelegt mit dem Lote von O

$$l_0 = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma,$$

so daß sich das gesuchte Lot zu

$$l_1 = l_0 - l = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - l \quad . \quad (12a)$$

ergibt.

4. Beispiel. Genügt ein Punkt gleichzeitig der Gleichung der Geraden

$$y = \lambda x + b, \quad z = \mu x + c$$

und der Ebene

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

so stellt er den Schnittpunkt beider dar mit der Abszisse

$$x = -\frac{Bb + Cc + D}{A + B\lambda + C\mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19),$$

woraus die beiden anderen Koordinaten durch Einsetzen in die Geradengleichung folgen.

Der Schnittpunkt rückt ins Unendliche, d. h. die Gerade wird der Ebene parallel, wenn in (18) der Nenner verschwindet, d. h. wenn

$$A + B\lambda + C\mu = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19a).$$

Durch Einführung der Richtungswinkel der Geraden und der Normalen zur Ebene kann sich der Leser leicht davon überzeugen, daß die Bedingung (19a) die senkrechte Stellung beider zueinander fordert.

5. Beispiel. Die Elimination je einer der Koordinaten y bzw. z aus den Gleichungen zweier Ebenen

$$\left.\begin{aligned} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 &= 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

liefert

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{B_1 C_2 - B_2 C_1}{C_1 A_2 - C_2 A_1} x + \frac{D_1 C_2 - D_2 C_1}{C_1 A_2 - C_2 A_1} \\ z &= \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{B_1 C_2 - B_2 C_1} x + \frac{D_1 B_2 - D_2 B_1}{B_1 C_2 - B_2 C_1} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20a).$$

d. h. die Gleichungen einer Geraden, welche als Schnitt der beiden Ebenen aufzufassen ist. Diese Schnittgerade rückt ins Unendliche, wenn die Nenner dieser Formeln verschwinden, d. h. wenn

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20\,b)$$

wird, eine Bedingung, welche offenbar die Übereinstimmung der Richtungswinkel der Normalen beider Ebenen ausspricht.

Nunmehr übersehen wir auch, daß die von uns benutzten Gleichungen einer Geraden, z B. in der Form (7 b), mit den Gleichungen zweier Ebenen normal zur XY- bzw. XZ-Ebene identisch sind, so daß wir also stets die Gerade analytisch durch die Gleichungen zweier Ebenen ersetzt haben.

§ 7. Flächen und Raumkurven.

Eine Gleichung zwischen drei Unbekannten x, y, z können wir uns nach jeder derselben, z. B. z aufgelöst denken und erhalten dann einen bestimmten Wert von z, wenn wir den beiden anderen x und y willkürliche Werte erteilt haben. Ändern wir diese letzteren Werte, so ändert sich auch die Größe z derart, daß jedem Wertpaare der willkürlichen, sog. unabhängigen Veränderlichen xy ein oder mehrere Werte der abhängigen Veränderlichen z zugehören. Diesen Zusammenhang können wir analog der Gl. (1) in § 1 durch die Formel

$$z = F(x, y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

(gesprochen: z gleich F von x und y) ausdrücken und z als eine Funktion der beiden Veränderlichen x und y bezeichnen.

Durch diese als Koordinaten betrachteten beiden unabhängigen Veränderlichen ist aber in unserem räumlichen Achsensystem Fig. 37 ein Punkt der XY-Ebene festgelegt, dem nach Gl. (1) ein oder mehrere Werte der dritten Koordinate z mit ebensoviel Punkten im Raume entsprechen. Durch stetige Änderung von x und y erhalten wir dann als geometrischen Ort der Endpunkte der zugehörigen z eine sog. Fläche, deren Gleichung durch (1) gegeben ist.

Genügen die drei Koordinaten x, y, z gleichzeitig zwei Flächengleichungen

$$z = F_1(x, y), \quad z = F_2(x, y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

so gehören sie der Schnittkurve beider Flächen an. Eliminieren wir aus den Gleichungen (2) je eine der Veränderlichen z bzw. y, so erhalten wir zwei neue Gleichungen

$$y = f_1(x), \quad z = f_2(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

welche die Projektionen der Schnittkurve auf die XY- bzw. XZ-Ebene darstellen. Legen wir nun durch drei Punkte $P_1 P_2 P_3$ dieser Kurve (Fig. 41) eine Ebene, so finden wir, daß die anderen Kurvenpunkte im allgemeinen aus dieser Ebene heraustreten, d. h. daß die Kurve selbst nicht in die Ebene hineinfällt. Wir bezeichnen sie darum im Gegensatz zu den früher betrachteten ebenen Kurven als eine Raumkurve und definieren sie analytisch durch die Gleichungen zweier Oberflächen, wie im vorigen Paragraphen die Gerade durch die Gleichungen zweier Ebenen. Verbindet man übrigens sämtliche Punkte der Kurve (Fig. 41) mit den zugehörigen Punkten ihrer Projektionen, zieht also die Geraden $P_1 P_1'' \,//\, P_2 P_2'' \,//\, P_3 P_3'' \,//\, OY$ und $P_1 P_1''' \,//\, P_2 P_2''' \,//\, P_3 P_3''' \,//\, OZ$, so zeigt sich, daß auch diese beiden Scharen von Parallelen je eine Fläche bilden, die wir als Zylinderflächen oder kurz als Zylinder mit den Leitkurven $P_1'' P_2'' P_3''$ und $P_1''' P_2''' P_3'''$ in den Koordinatenebenen OXZ und OXY bezeichnen wollen. Da z. B. dem Punkte P_2'' der einen Leitkurve kein bestimmter Zylinderpunkt, sondern alle Punkte der Geraden $P_2'' P_2$ zugehören, so kann die Gleichung des Zylinders $P_1 P_2 P_3\ P_1'' P_2'' P_3''$ die Koordinate y nicht enthalten, und ebenso die Gleichung des anderen Zylinders nicht die Koordinate z. Dies trifft aber schon für die Formeln (3) zu, welche somit nicht nur die Gleichungen der Projektionen der Raumkuve, sondern auch diejenigen der zugehörigen Zylinder parallel der Y- und Z-Achse darstellen, als deren Schnitt wir die Raumkurve somit betrachten dürfen.

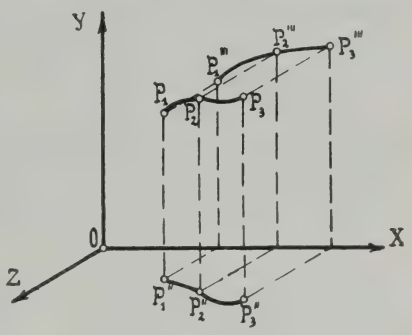

Fig. 41.

Schneiden wir dagegen eine Fläche durch eine Ebene, so wird die Schnittkurve naturgemäß eine ebene Kurve sein. Hiervon macht man in der Kartographie vielfach Gebrauch zur anschaulichen Darstellung der Oberflächengestalt der Erde durch

Schnitte mit Horizontalebenen in gleichen Vertikalabständen. Legen wir z. B. den Meereshorizont in unsere XY-Ebene, so erhalten wir die aufeinanderfolgenden Horizontalschnitte aus Gl. (1) dadurch, daß wir der Höhe z die Werte $z_1 z_2 z_3$ usw. derart erteilen, daß $z_2 - z_1 = z_3 - z_2$ usf. ist. Auf diese Weise erhalten wir in Fig. 42 auf den entsprechenden Horizontalebenen E_1, E_2, E_3 usw. die sog. Höhenkurven (auch Isohypsen genannt) K_1, K_2, K_3 mit den Gleichungen

$$F(x,y) = z_1, \quad F(x,y) = z_2, \quad F(x,y) = z_3 \text{ usw.} \qquad (1\,a),$$

aus denen die Gestalt der Fläche leicht ersichtlich ist. Da diese Gleichungen mit denen ihrer Projektionen auf die X-Y-Ebene identisch sind, so stellen sie außerdem noch die Gleichungen

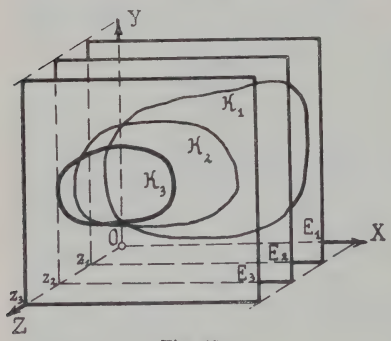

Fig. 42.

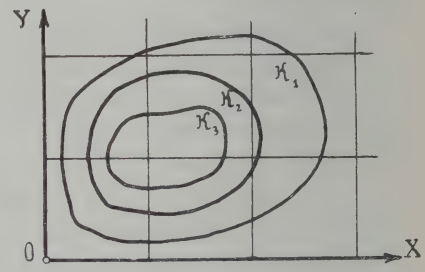

Fig. 43.

von Zylindern parallel zur Z-Achse dar, deren Schnitte mit der Fläche Gl. (1) ebenfalls die Kurven $K_1 K_2 K_3$ ergeben. Auf den Landkarten verzichtet man allerdings, um das Durcheinanderlaufen von Höhenkurven zu vermeiden, auf die parallel-perspektivische Darstellung der Fig. 42 und erhält so das Bild Fig. 43 der Projektionen aller Kurven auf die Zeichenebene, in dem ein dem Achsenkreuze OXY paralleles Liniennetz die Gradeinteilung andeutet.

Nach diesen allgemeinen Vorbemerkungen gehen wir zur Besprechung einiger Flächen selbst über, von denen neben der im vorigen Paragraphen eingehend behandelten Ebene und den oben gekennzeichneten Zylindern die Kugel sich durch besondere Einfachheit auszeichnet. Definieren wir sie als geometrischen Ort aller Punkte mit gleichem Abstand a

vom Koordinatenanfang O, so erhalten wir aus Gl. (1) § 6 mit $r = a$ sofort

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

als Mittelpunktsgleichung der Kugel mit dem Radius a. Verlegen wir ihren Mittelpunkt dagegen in einen Punkt $x_0 y_0 z_0$, so folgt nach Analogie von Gl. (5) § 6 für einen beliebigen Punkt xyz im Abstande a vom Zentrum

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2 \quad . \quad . \quad (4\,a).$$

Setzen wir in diesen beiden Formeln $z = 0$ bzw. $z = z_0$, d. h. schneiden wir die Kugel durch eine Ebene, welche der XY-Ebene parallel verläuft und das Zentrum trifft, so ergeben sich sofort die Kreisgleichungen (1) und (8) des § 3.

Schneiden wir auf den Achsen die drei Stücke $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ ab, so können wir über ihnen als Halbachsen in den Koordinatenebenen OXY, OYZ, OZX drei Ellipsen konstruieren (Fig. 44). Eine Parallelebene zu OYZ mit der Abszisse $OA' = x$ trifft die beiden Ellipsen AB und AC in den Punkten B' und C' mit den Ordinaten $A'B' = y_0$ und $A'C' = z_0$. Errichten wir dann über diesen Ordinaten als Halbachsen wieder eine Ellipse $B'C'$, so genügt ein Punkt P derselben der Gleichung

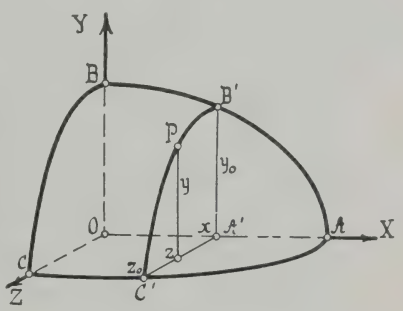

Fig. 44.

$$\frac{y^2}{{y_0}^2} + \frac{z^2}{{z_0}^2} = 1,$$

während die Gleichungen der Ellipsen AB und AC lauten

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{{y_0}^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{{z_0}^2}{c^2} = 1.$$

Berechnen wir hieraus ${y_0}^2$ und ${z_0}^2$ und setzen diese Zwischenwerte in die Gleichung der Ellipse $B'C'$ ein, so folgt nach Vereinigung aller veränderlichen Glieder auf der linken Seite

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

also die Gleichung einer Fläche, welche die Koordinaten $y_0 z_0$

nicht mehr enthält, für $x = 0$ aber die Ellipse BC ergibt. Diese Fläche bezeichnen wir als ein Ellipsoid mit den drei Halbachsen a, b, c, die im allgemeinen verschieden ausfallen. Werden zwei dieser Halbachsen einander gleich, z. B. $a = b$, so wird die Ellipse AB ein Kreis und (5) geht über in

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5\,a).$$

Hierin bedeutet aber $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ den Abstand eines Punktes der Oberfläche von der Z-Achse, so daß wir auch an Stelle von (5 a)

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5\,b)$$

setzen dürfen. Für konstante Werte von z, denen Schnitte parallel der XY-Ebene entsprechen, ergeben somit die letzten beiden Formeln Kreise, so daß wir uns das Ellipsoid (Fig. 45) auch durch Umdrehung der Kurve AC oder BC um die Z-Achse entstanden denken können. Demgemäß bezeichnen wir die Fläche als ein Umdrehungs- oder Rotationsellipsoid, und zwar, je nachdem $a \lesseqgtr c$, als ein gestrecktes oder abgeplattetes.

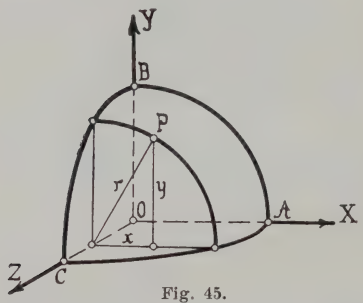

Fig. 45.

Konstruiert man in derselben Weise (Fig. 46) in der XY und XZ-Ebene zwei Hyperbeln mit den Hauptachsen $OB = b$ und $OC = c$ und der gemeinsamen Nebenachse a, so besitzen diese im Abstande x von der YZ-Ebene die Koordinaten $A'B' = y_0$ und $A'C' = z_0$, über denen wir als Halbachsen dann eine Ellipse mit der Gleichung

$$\frac{y^2}{{y_0}^2} + \frac{z^2}{{z_0}^2} = 1$$

konstruieren können, während die Gleichungen der beiden Hyberbeln

$$\frac{{y_0}^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \quad \frac{{z_0}^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

lauten. Durch Elimination von x_0 und y_0 folgt daraus die Gleichung

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

welche ein sog. einschaliges Hyperboloid (Fig. 46) darstellt. Schreiben wir die Gleichung in der Form

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1-\frac{y^2}{b^2},$$

so können wir sie aus der Multiplikation zweier Ebenengleichungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{z}{c}-\frac{x}{a}&=\lambda\left(1-\frac{y}{b}\right)\\ \frac{z}{c}+\frac{x}{a}&=\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{y}{b}\right)\end{aligned}\right\} \text{ oder } \left.\begin{aligned}\frac{z}{c}-\frac{x}{a}&=\mu\left(1+\frac{y}{b}\right)\\ \frac{z}{c}+\frac{x}{a}&=\frac{1}{\mu}\left(1-\frac{y}{b}\right)\end{aligned}\right\} \quad (6\,a),$$

die zusammen für den beliebigen Wert von λ und μ zwei Gerade DD und $D'D'$ definieren, hervorgegangen denken. Da alle Punkte dieser Geraden unabhängig von λ und μ der Gl. (6) genügen, so liegen die Geraden selbst auf der Hyperboloidfläche, die somit durch je eine Schar solcher Geraden gebildet werden kann. Dies trifft auch dann noch zu, wenn mit $c = b$ und $y^2 + z^2 = r^2$ aus Gl. (6)

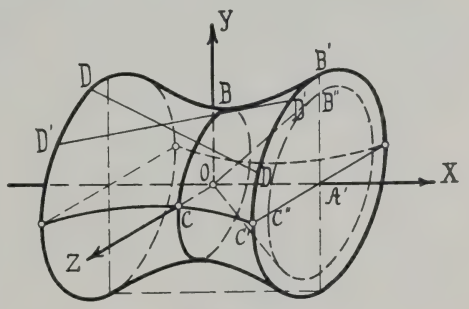

Fig. 46.

$$\frac{r^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6\,b)$$

wird, die Fläche also in ein einschaliges Rotationshyperboloid übergeht. Daher kann man diese Fläche bequem durch Rotation einer die Drehachse nicht schneidenden Geraden erzeugen.

Wiederholen wir die in Fig. 46 angedeutete Konstruktion mit den Asymptotenpaaren der beiden Hyperbeln, deren Gleichungen mit $OA' = x$, $A'B'' = y_0$, $A'C'' = z_0$ in Fig. 47

$$\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=0, \quad \frac{z_0^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=0$$

oder

$$\frac{y_0}{b} = \pm\frac{x}{a} = \frac{z}{c}$$

lauten, so folgt durch Elimination der Hilfsveränderlichen y_0 und z_0 aus der Gleichung

$$\frac{y^2}{{y_0}^2} + \frac{z^2}{{z_0}^2} = 1$$

der über y_0 und z_0 errichteten Ellipse $B''C''$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

d. i. die Gleichung des sog. Asymptotenkegels des einschaligen Hyperboloids (6). Dieser Kegel, der, wie aus Fig. 46 hervorgeht, auch durch Führung einer durch O hindurchgehenden Geraden längs einer Ellipse $B''C''$ normal zur Achse OA' erzeugt werden kann, ist demnach ein elliptischer und geht für $c = b$ und $y^2 + z^2 = r^2$, entsprechend dem Rotationshyperboloid (6b), in einen Rotations- oder Kreiskegel

$$\frac{r^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7\,a)$$

über.

Nunmehr übersieht der Leser leicht, daß man auch aus zwei sich in der X-Achse schneidenden Hyperbeln AB' und AC' mit gemeinsamer Hauptachse a eine weitere Fläche (Fig. 47) mit der Gleichung

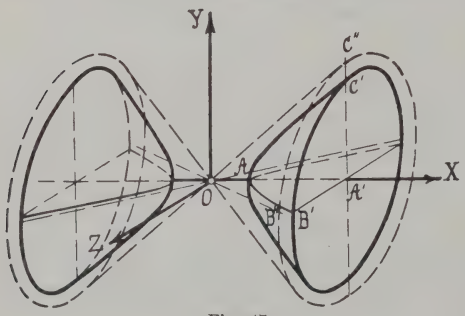

Fig. 47.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (8)$$

konstruieren kann, die offenbar in zwei getrennte Schalen zerfällt und darum als zweischaliges Hyperboloid bezeichnet wird. Ihr entspricht, wie ebenfalls aus Fig. 47 ersichtlich, ein (elliptischer) Asymptotenkegel $OB''C''$ mit der Achse OX und der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9),$$

der für gleiche Halbachsenlängen mit dem durch (7) gegebenen

Asymptotenkegel des einschaligen Hyperboloids identisch ist, so daß man die Fläche Fig. 47 noch in die Fig. 46 hineinzeichnen könnte. Dies tritt noch deutlicher für die Rotationsfläche hervor, deren Gleichung aus (8) mit $c = b$ und $y^2 + z^2 = r^2$ sich zu

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{r^2}{b^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8\,a)$$

ergibt, also nur durch das Vorzeichen der linken Seite sich von (6 b) unterscheidet wie zwei Hyperbeln mit gemeinsamem Asymptotenpaar.

Die bisher besprochenen Flächen besitzen sämtlich den Koordinatenanfang als Mittelpunkt und liegen, entsprechend der rein quadratischen Natur ihrer Gleichungen, symmetrisch zu den Koordinatenebenen. Sie gehen daher, wenn eine der drei Halbachsen unendlich groß wird, in elliptische oder hyperbolische Zylinder über.

Wollen wir über der Parabel Flächen dieser Art konstruieren, so werden wir im einfachsten Falle deren Scheitel, wie in Fig. 26, in den Koordinatenanfang legen und erhalten dann in Fig. 48 mit $OA = x$, $AB = y_0$, $AC = z_0$ für eine Ellipse $BCB'C'$ über den Achsen y_0, z_0

$$\frac{y^2}{{y_0}^2} + \frac{z^2}{{z_0}^2} = 1,$$

während die Gleichungen zweier in O sich rechtwinklig schneidender Parabeln mit den Parametern p_1 und p_2

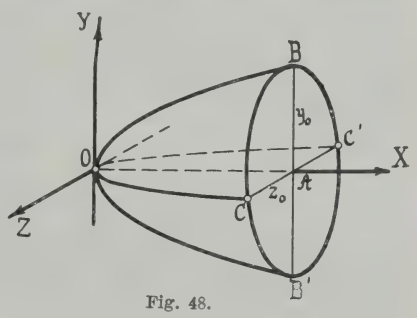

Fig. 48.

$$y_0^2 = 2\,p_1 x, \quad z_0^2 = 2\,p_2 x$$

lauten, woraus dann durch Elimination von y_0 und z_0

$$\frac{y^2}{p_1} + \frac{z^2}{p_2} = 2x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

als Gleichung der sog. elliptischen Paraboloids hervorgeht.

Konstruieren wir dagegen in Fig. 49 über den beiden Achsen $AB = y_0$ und $AC = z_0$ im Abstande $OA = x$ eine Hyperbel

$$\frac{y^2}{{y_0}^2} - \frac{z^2}{{z_0}^2} = 1$$

und setzen wieder

$$y_0^2 = 2p_1x, \quad z_0^2 = 2p_2x,$$

so folgt als Gleichung der sattelförmigen Fläche des hyperbolischen Paraboloids

$$\frac{y^2}{p_1} - \frac{z^2}{p_2} = 2x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Diese können wir uns auch analog derjenigen des einschaligen Hyperboloids aus der Multiplikation zweier Ebenengleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{y}{\sqrt{p_1}} - \frac{z}{\sqrt{p_2}} &= \lambda \\ \frac{y}{\sqrt{p_1}} + \frac{z}{\sqrt{p_2}} &= \frac{2x}{\lambda} \end{aligned}\right\} \text{ oder}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{y}{\sqrt{p_1}} - \frac{z}{\sqrt{p_2}} &= \frac{2x}{\mu} \\ \frac{y}{\sqrt{p_1}} + \frac{z}{\sqrt{p_2}} &= \mu \end{aligned}\right\} \quad (11\,a)$$

hervorgegangen denken, die zusammen für jeden Wert von λ bzw. μ je eine Gerade DD und $D'D'$ auf der Fläche definieren. Für $x = 0$, d. h. in der YZ-Ebene zerfällt die Gl. (11) in

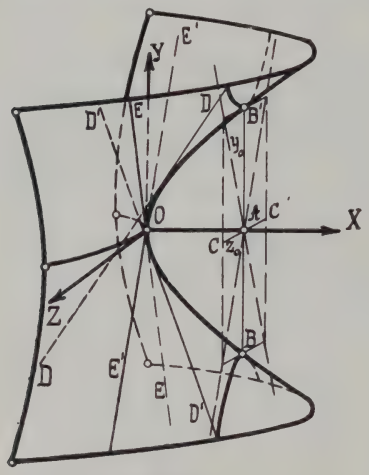

Fig. 49.

$$\frac{y}{\sqrt{p_1}} - \frac{z}{\sqrt{p_2}} = 0, \quad \frac{y}{\sqrt{p_1}} + \frac{z}{\sqrt{p_2}} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (11\,b),$$

die zwei Geraden EOE und $E'OE'$ auf der Fläche durch den Scheitel zugehören. Diese beiden Geraden stellen überdies die Spuren zweier sich in der X-Achse schneidenden Ebenen OAE und OAE' dar, welche die Asymptoten aller zur X-Achse normalen Hyperbelschnitte der Fläche enthalten. Mit den beiden Paraboloiden, deren Gleichungen zwar nicht mehr in allen Koordinaten rein quadratisch wie die Mittelpunktsgleichungen des Ellipsoides und der beiden Hyperboloide, aber doch noch vom zweiten Grade sind, ist die Reihe der Flächen zweiten Grades geschlossen, da die ebenfalls hierher gehörigen elliptischen und hyperbolischen Zylinder und Kegel sowie die Kugel nur als Spezialfälle anzusehen sind, zu denen sich schließlich noch zwei Ebenen gesellen können.

Von anderen Flächen wollen wir ihrer praktischen Bedeutung wegen nur die einfache Schraubenfläche noch kurz betrachten, welche durch eine gleichzeitige Drehung einer Geraden AB um eine zu ihr senkrechte Achse OZ und eine der Drehung φ proportionale Parallelverschiebung z längs dieser Achse entsteht (Fig. 50). Demnach ist mit einem Proportionalitätsfaktor r_0

$$z = r_0 \varphi \quad (12)$$

schon die Gleichung der Schraubenfläche in einem den ebenen Polarkoordinaten analogen Zylinderkoordinatensystem r, φ, z. Da nun nach Fig. 50: $y = x \operatorname{tg} \varphi$ ist, so dürfen wir auch an Stelle von (12) in unserem rechtwinkligen System für die Schraubenfläche schreiben

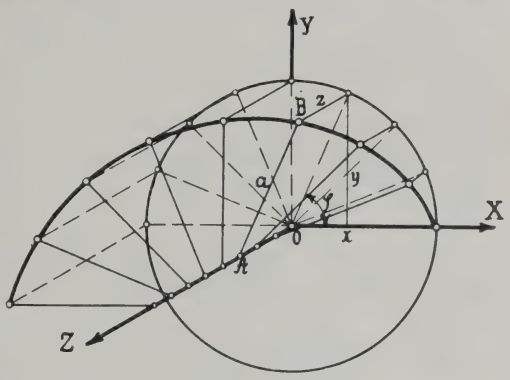

Fig. 50.

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{z}{r_0} \text{ oder } \frac{z}{r_0} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad . \quad . \quad . \quad (12\,\text{a}).$$

Schneiden wir diese Fläche mit einem Zylinder vom Radius a oder verbinden, was auf dasselbe hinausläuft, alle Punkte B auf der bewegten Geraden im Abstande a von der Achse untereinander, so entsteht eine Schraubenlinie, für die mit Rücksicht auf (12) die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cos \varphi = a \cos \frac{z}{r_0} \\ y &= a \sin \varphi = a \sin \frac{z}{r_0} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

bestehen, an deren Stelle wir auch (12a) mit der Zylindergleichung $r = a$ oder

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

hätten kombinieren können. Aus (13) geht hervor, daß die beiden Projektionen der Schraubenlinie auf die XZ- und

YZ-Ebene Sinuslinien (vgl. Fig. 18) sind. Bezeichnet man die Verschiebung der Erzeugungsgeraden für eine ganze Umdrehung $\varphi = 2\pi$, die sog. Ganghöhe der Schraube oder Schraubensteigung mit h, so ist nach (12)

$$h = 2 r_0 \pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14\,\text{b})$$

und wir erhalten an Stelle von (13) das Gleichungspaar

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cos 2\pi \frac{z}{h} \\ y &= a \sin 2\pi \frac{z}{h} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13\,\text{a}).$$

Der Leser kann leicht feststellen, daß die Schraubenlinie keine ebene, sondern eine Raumkurve ist, die sich aber sehr bequem durch Aufwickeln eines Dreiecks auf einen Kreiszylinder konstruieren läßt.

1. Beispiel. Eine Gerade durch den Anfang mit den Neigungswinkeln φ, ψ, χ erfüllt die Gleichungen

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \cos \psi, \quad z = r \cos \chi,$$

worin r den veränderlichen Abstand OP irgendeines Punktes der Geraden vom Anfang O bedeutet, so zwar, daß

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

ist (Fig. 51). Verlangen wir nun, daß diese Gerade mit einer anderen durch den Anfang, deren Neigungswinkel α, β, γ sind, einen Winkel ϑ einschließt, so haben wir nur aus der Formel $\cos\alpha \cos\varphi + \cos\beta \cos\psi + \cos\gamma \cos\chi = \cos\vartheta$ die Winkel φ, ψ und χ zu eliminieren, also

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = r \cos\vartheta$$

zu schreiben. Dies liefert für $\vartheta = 90$, also $\cos\vartheta = 0$ die Gleichung einer Ebene durch den Anfang; ersetzen wir jedoch den Abstand r durch seinen Wert in den drei Koordinaten, so folgt

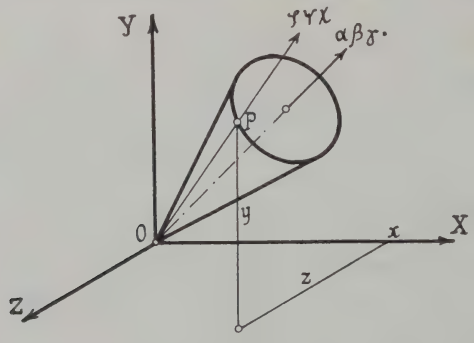

Fig. 51.

$$(x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma)^2 = (x^2 + y^2 + z^2) \cos^2\vartheta \quad . \quad (15)$$

als Gleichung des geometrischen Ortes aller Punkte, deren Fahrstrahl mit einer durch ihre Neigung $\alpha\beta\gamma$ gegebenen Geraden einen kon-

stanten Winkel ϑ bildet. Dies ist aber nichts anderes als ein Kreiskegel mit der Spitze im Anfang, der Achsenneigung $\alpha\beta\gamma$ und dem Öffnungswinkel $2\,\vartheta$, dessen Gleichung somit durch (15) gegeben ist. Man übersieht sofort, daß daraus die Gleichung eines kongruenten Kreiskegels mit der Spitze in einem Punkte $x_0y_0z_0$ durch Ersatz von xyz in Gl. (15) durch $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$ hervorgeht.

2. Beispiel. Schneiden wir die Kugel (Fig. 52)

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

mit einer Geraden von der Neigung $\varphi\,\psi\,\chi$ durch den Punkt P mit den Koordinaten $x_0y_0z_0$ im Abstande l von O, deren Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x&=x_0+r\cos\varphi,\\ y&=y_0+r\cos\psi,\\ z&=z_0+r\cos\chi \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

lauten, so wird durch Einsetzen mit $x_0^2+y_0^2+z_0^2=l^2$

$$2r\,(x_0\cos\varphi+y_0\cos\psi+z_0\cos\chi)+r^2=a^2-l^2 \quad (17).$$

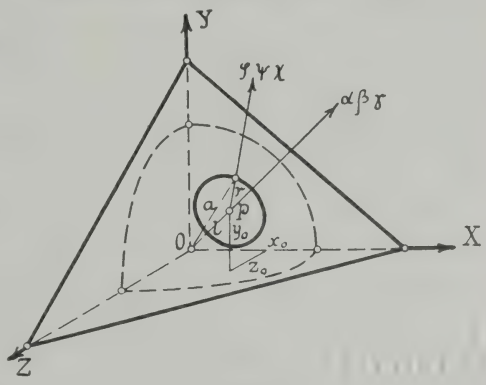

Fig. 52.

Steht dann die Gerade auf der Strecke l mit den Neigungswinkeln α,β,γ senkrecht, so liegt sie auf einer Ebene und es wird wegen $x_0=l\cos\alpha$, $y_0=l\cos\beta$, $z_0=l\cos\gamma$ sowie

$$\cos\alpha\cos\varphi+\cos\beta\cos\psi+\cos\gamma\cos\chi=0$$
$$r^2=a^2-l^2 \quad (17a)$$

d. h. die Ebene

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=l$$

schneidet die Kugel mit dem Radius a um den Anfang in einem Kreise, solange $l<a$, während für größere Entfernungen l der Kreisradius imaginär wird. Für $l=a$ berührt die Ebene die Kugel im Punkte $x_0y_0z_0$, und ihre Gleichung erhält nach Elimination der Richtungswinkel $\alpha\beta\gamma$ die Form

$$xx_0+yy_0+zz_0=a^2 \quad (18)$$

3. Beispiel. Die Gerade (16) schneidet das Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

in Punkten, deren Abstände r von $x_0y_0z_0$ sich nach Einsetzen von (16) in die Ellipsoidgleichung aus

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1+2r\left(\frac{x_0\cos\varphi}{a^2}+\frac{y_0\cos\psi}{b^2}+\frac{z_0\cos\chi}{c^2}\right)+r^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\cos^2\psi}{b^2}+\frac{\cos^2\chi}{c^2}\right)=0 \quad (18)$$

ergeben. Da diese Gleichung zwei Wurzeln für r besitzt, so schneidet die Gerade im allgemeinen das Ellipsoid in zwei Punkten. Sollen diese beiden Punkte in gleichem Abstande zu beiden Seiten von $x_0y_0z_0$ auf der Geraden liegen, so müssen die Wurzeln von (18) entgegengesetzt gleich, die Gleichung also in r rein quadratisch sein, d. h. es muß

$$\frac{x_0\cos\varphi}{a^2}+\frac{y_0\cos\psi}{b^2}+\frac{z_0\cos\chi}{c^2}=0 \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

sein. Dies ist aber die Gleichung einer Ebene durch den Ellipsoidmittelpunkt, eine sog. Diametralebene, welche somit alle Parallelsehnen mit den Richtungswinkeln φ,ψ,χ halbiert.

Der Nachweis dieses Satzes für die anderen Flächen zweiten Grades sei dem Leser zur Übung empfohlen.

4. Beispiel. Schneiden wir das Ellipsoid ABC (Fig. 53)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

mit einer konzentrischen Kugel A_0BC_0, deren Radius mit einer der Ellipsoidhalbachsen, z. B. $OB=b$, übereinstimmt, also

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1,$$

so folgt durch Subtraktion

$$x^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)=0$$

oder

$$x^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)=z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right) \quad (20),$$

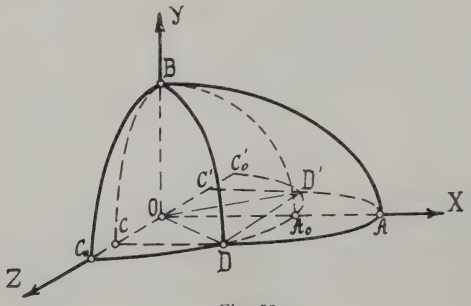

Fig. 53.

woraus

$$\frac{x}{z}=\pm\sqrt{\frac{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}}$$

d. h. die Gleichung zweier Ebenen OBD und OBD' durch die Y-Achse folgt, solange gleichzeitig entweder $a^2>b^2>c^2$ oder

$a^2 < b^2 < c^2$, d. h. solange der Kugelradius der mittleren Ellipsoidachse gleich ist. Da ferner nach dem 2. Beispiel alle ebenen Kugelschnitte Kreise sind, so schneidet die Kugel durch die Enden der mittleren Ellipsoidhalbachsen das Ellipsoid in zwei Kreisen.

5. Beispiel. Der Schnitt einer Kugel ABC (Fig. 54)

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

mit einem geraden Kreiszylinder vom Durchmesser a, dessen Mantel durch die Y-Achse geht, während seine Achse MN in der XY-Ebene liegt, also von der Gleichung

$$z^2 = x\,(a - x) \quad . \quad (21),$$

liefert eine Raumkurve, deren Projektion $AP'B$ auf die XY-Ebene nach Elimination von z aus diesen Formeln die Gleichung

$$y^2 = a\,(a - x) \quad . \quad (22)$$

besitzt, also eine Parabel ist. Daher kann man die Schnittkurve auch als die des Kreiszylinders mit dem parabolischen Zylinder über $AP'B$ auffassen, woraus ihr räumlicher Charakter sofort erhellt, da ein ebener Kugelschnitt ein Kreis sein muß, dessen Projektion auf die XY-Ebene als Ellipse, bzw. in unserem Falle als eine Gerade durch AB erscheinen muß.

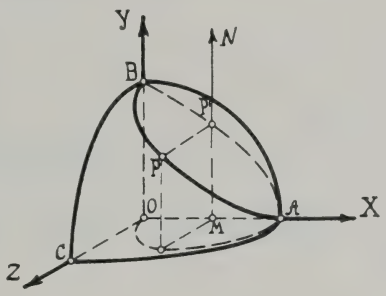

Fig. 54.

Kapitel II.

Differential- und Integralrechnung.

§ 8. Grundregeln der Differentiation.

Verbinden wir zwei Punkte $x_1 y_1$ und xy einer ebenen Kurve (Fig. 55) mit der Gleichung

$$y = f(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

durch eine Sehne, so ist deren Neigungswinkel τ gegen die Abszissenachse durch

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \quad (2)$$

gegeben. Rücken wir die beiden Punkte einander immer näher, so geht die Sehne schließlich bei verschwindenden Differenzen $y - y_1$ und $x - x_1$ in die Tangente über. Deren Neigungswinkel τ_1 ist daher durch den Grenzwert (limes) des Quotienten der verschwindenden Koordinatendifferenzen, der sog. Differentiale, die wir nach dem Vorgange von Leibniz mit dy bzw. dx bezeichnen wollen, derart bestimmt, daß

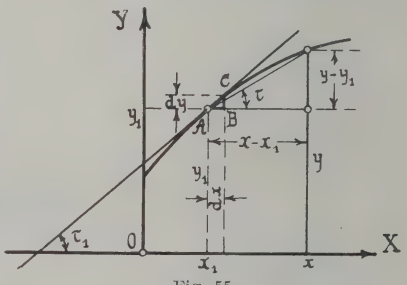

Fig. 55.

$$\operatorname{tg}\tau_1 = \lim\left(\frac{y - y_1}{x - x_1}\right) = \frac{dy}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

(gesprochen dy nach dx) den Differentialquotienten von y nach x definiert. Die Differentiale dy und dx erscheinen demnach als die Katheten eines unendlich kleinen rechtwinkligen Dreiecks ABC (Fig. 55), dessen Hypothenuse ein unendlich kleines Stück der Kurve s selbst, ein Kurven- oder Bogendifferential ds bildet. Mit dieser Auffassung aber können wir an Stelle von (3) auch schreiben

$$\left.\begin{aligned} dy &= \operatorname{tg}\tau_1\, dx = \sin\tau_1\, ds \\ dx &= \operatorname{cotg}\tau_1\, dy = \cos\tau_1\, ds \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3a),$$

d. h. wir dürfen die Differentiale wie endliche Größen behandeln. Häufig setzt man auch zur Abkürzung sowie um die Unabhängigkeit des Differentialquotienten einer Funktion von ihrer geometrischen Darstellung zu betonen,

$$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x) = \lim\left[\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}\right] \quad \ldots \quad (4)$$

und an Stelle von (3a)

$$dy = y'dx, \quad dx = \frac{dy}{y'} \quad \ldots \quad (4a).$$

Die Bildung des Differentialquotienten ist somit eine Rechenoperation, die man als Differentiation oder mit dem Zeitworte differentieren bezeichnet.

Schreiben wir an Stelle von (1) die inverse Funktion

$$x = F(y) \quad \ldots \quad (5),$$

die nach den Darlegungen von § 1 ebenfalls durch die Kurve (Fig. 55) dargestellt ist, so erhalten wir für deren Differentialquotienten

$$\frac{dx}{dy} = F'(y) = \operatorname{cotg}\tau_1 \quad \ldots \quad (5a)$$

und daher in Verbindung mit (3) und (4)

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = f'(x) \cdot F'(y) = \operatorname{tg}\tau_1 \operatorname{cotg}\tau_1 = 1 \quad \ldots \quad (5b),$$

d. h. die Differentialquotienten inverser Funktionen sind einander reziprok.

Haben wir es ferner mit einem Ausdruck von der Form

$$y = a f(x) + C \quad \ldots \quad (6)$$

zu tun, in dem a und C konstante Größen bedeuten, so folgt durch Wiederholung der obigen Betrachtungen

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{[af(x)+C]-[af(x_1)+C]}{x-x_1}=a\,\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \quad (6a),$$

mithin beim Übergang zur Grenze $x=x_1$

$$\frac{dy}{dx}=af'(x) \quad \ldots\ldots \quad (6b),$$

d. h. durch die Differentiation einer Funktion bleibt ein konstanter Faktor derselben ungeändert, während eine zusätzliche (additive) Konstante dabei verschwindet.

Hat die vorgelegte Gleichung die Form

$$f(x)=F(y) \quad \ldots\ldots \quad (7),$$

so kann man sie mit einer Hilfsveränderlichen u auch in zwei Gleichungen

$$u=f(x), \quad u=F(y)$$

auflösen und erhält durch Differentiation

$$\frac{du}{dx}=f'(x), \quad \frac{du}{dy}=F'(y),$$

woraus nach Elimination des Differentials du

$$f'(x)\,dx=F'(y)\,dy \quad \ldots\ldots \quad (7a)$$

oder

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f'(x)}{F'(y)} \quad \ldots\ldots \quad (7b)$$

hervorgeht. Es ist also für die Differentiation gar nicht notwendig, eine vorgelegte Gleichung nach einer der Veränderlichen vollständig aufzulösen.

Mit den vorstehenden Regeln können wir nunmehr unter Weglassung der additiven Konstanten zur Bildung des Differentialquotienten einer Potenz vorschreiten. Ist

$$y=ax^n \quad \ldots\ldots \quad (8),$$

mit dem ganzen positiven Exponenten n, so folgt zunächst

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=a\,\frac{x^n-x_1^n}{x-x_1}$$
$$=a\,(x^{n-1}+x^{n-2}\cdot x_1+x^{n-3}x_1^2+\ldots+x_1^{n-1}),$$

worin die Klammer der rechten Seite n-Glieder umfaßt, die für $x=x_1$ d. h. beim Grenzübergang alle einander gleich werden Mithin ist

$$\frac{dy}{dx}=nax^{n-1} \quad \ldots\ldots \quad (8a).$$

Für einen negativen ganzen Exponenten $n = -m$ ist

$$y = ax^{-m} = \frac{a}{x^m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8\text{b}),$$

also

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = a \frac{\frac{1}{x^m} - \frac{1}{x_1^m}}{x - x_1} = -\frac{a}{x^m x_1^m} \cdot \frac{x^m - x_1^m}{x - x_1}$$

$$= -\frac{a}{x^m x_1^m} (x^{m-1} + x^{m-2} x_1 + \cdots + x_1^{m-1})$$

oder für $x = x_1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-ma}{x^{2m}} x^{m-1} = -max^{-m-1} = nax^{n-1} \quad (8\text{c}).$$

Für einen gebrochenen Exponenten $n = \frac{p}{q}$ ist

$$y = ax^{\frac{p}{q}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8\text{d})$$

oder

$$y^q = a^q x^p.$$

Hieraus folgt nach der Regel (7 a)

$$qy^{q-1} dy = a^q p\, x^{p-1} dx$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{pa^q}{q} \frac{x^{p-1}}{y^{q-1}} = \frac{p}{q} a\, x^{\frac{p}{q}-1} = nax^{n-1} \quad . \quad . \quad (8\text{c}).$$

Die durch (8a) ausgedrückte Differentiationsregel gilt somit für positive, negative, ganze und gebrochene Exponenten.

Wir betrachten nunmehr die Summe oder Differenz zweier Funktionen

$$y = f_1(x) \pm f_2(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9),$$

woraus

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{[f_1(x) \pm f_2(x)] - [f_1(x_1) \pm f_2(x_1)]}{x - x_1}$$

oder

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{f_1(x) - f_1(x_1)}{x - x_1} \pm \frac{f_2(x) - f_2(x_1)}{x - x_1}$$

und durch deren Übergang zum Grenzwert

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{y - y_1}{x - x_1} = f_1'(x) \pm f_2'(x) \quad . \quad . \quad . \quad (9\text{a})$$

folgt. Der Differentialquotient der Summe oder

Differenz zweier Funktionen ist demnach gleich der Summe bzw. der Differenz der einzelnen Differentialquotienten.

Man übersieht sofort, daß diese Sätze sich ohne weiteres auf eine beliebige Zahl von Funktionen ausdehnen lassen, womit zugleich die Differentiation einer algebraischen Summe von Potenzen mit konstanten Faktoren erledigt ist.

In vielen Fällen haben wir es nicht mit einer direkten Abhängigkeit der Veränderlichen y von x zu tun, sondern mit einem Zusammenhange durch Vermittlung einer dritten Veränderlichen u, derart daß

$$y = f(u), \quad x = F(u) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

ist. Alsdann ist

$$\frac{dy}{du} = f'(u), \quad \frac{dx}{du} = F'(u)$$

und nach Division unter Wegfall der Differentiale du

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(u)}{F'(u)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10a).$$

Hat dagegen das Gleichungspaar die Form

$$y = f(u), \quad u = F(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11),$$

so spricht man y als die Funktion einer Funktion u von x an, und erhält durch Differentiation

$$\frac{dy}{du} = f'(u), \quad \frac{du}{dx} = F'(x)$$

und nach Multiplikation beider Ausdrücke unter Wegfall von du

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot F'(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11a).$$

1. Beispiel. So kann man an Stelle von

$$y = (a + bx^n)^k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

setzen

$$y = u^k, \quad u = a + bx^n,$$

woraus nach (11a)

$$\frac{dy}{dx} = ku^{k-1} \cdot nbx^{n-1} = knb(a + bx^n)^{k-1} \cdot x^{n-1} \quad . \quad (12a)$$

folgt, und zwar für alle reellen Werte der Exponenten k und n.

Ist x weiterhin das Produkt zweier Funktionen

$$y = f(x) \cdot F(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

vorgelegt, so schreibe man mit

$$u = f(x), \quad v = F(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13\,a)$$

kürzer

$$y = u \cdot v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13\,b)$$

und daher

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{uv - u_1 v_1}{x - x_1} = \frac{uv - uv_1 + uv_1 - u_1 v_1}{x - x_1}$$

oder

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = u \frac{v - v_1}{x - x_1} + v_1 \frac{u - u_1}{x - x_1}.$$

Beim Übergang zur Grenze $u = u_1$, $v = v_1$ wird daraus

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13\,c),$$

worin natürlich

$$\frac{du}{dx} = f'(x), \quad \frac{dv}{dx} = F'(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13\,d)$$

bedeutet.

2. Beispiel. Nach dieser Rechenvorschrift kann man in

$$y = (a_1 + b_1 x)^n (a_2 + b_2 x^k) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

setzen

$$u = (a_1 + b_1 x)^n, \quad v = a_2 + b_2 x^k$$

und erhält daraus unter Berücksichtigung der Regel (11a)

$$\frac{du}{dx} = n b_1 (a_1 + b_1 x)^{n-1}, \quad \frac{dv}{dx} = k b_2 x^{k-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = b_1 n (a_1 + b_1 x)^{n-1} (a_2 + b_2 x^k) + b_2 k x^{k-1} (a_1 + b_1 x)^n \quad (14\,a).$$

Schreiben wir an Stelle des Quotienten zweier Funktionen

$$y = \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{u}{v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15),$$

umgekehrt

$$yv = u,$$

so liefert die Regel für das Produkt

$$v \frac{dy}{dx} + y \frac{dv}{dx} = \frac{du}{dx}$$

oder mit (15)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{v^2} \left(v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx} \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15\,a),$$

ein Ergebnis, das wir natürlich auch unmittelbar aus (15) durch den Grenzübergang hätten ableiten können.

3. Beispiel. Hat man z. B.

$$y = \frac{(a_1 + b_1 x)^n}{a_2 + b_2 x^k} = \frac{u}{v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

so ist

$$\frac{du}{dx} = n b_1 (a_1 + b_1 x)^{n-1}, \quad \frac{dv}{dx} = k b_2 x^{k-1},$$

also

$$y = \frac{n b_1 (a_1 + b_1 x)^{n-1} (a_2 + b_2 x^k) - k b_2 x^{k-1} (a_1 + b_1 x)^n}{(a_2 + b_2 x^k)^2} \quad (16a).$$

Sind schließlich die beiden Veränderlichen x, y durch eine Gleichung verknüpft, die wir weder nach x noch nach y auflösen können, so schreiben wir für diese Gleichung allgemein

$$f(x,y) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

und sagen aus, daß sie beide Veränderliche implizite enthält. Genügt ein anderes Wertpaar $x_1 y_1$ ebenfalls dieser Gleichung, so dürfen wir auch $f(x_1 y_1) = 0$ setzen und erhalten durch Subtraktion von (17) und Division mit der Differenz $x - x_1$

$$\frac{f(xy) - f(x_1 y_1)}{x - x_1} = 0$$

und nach Hinzufügung von $f(x_1 y) - f(x_1 y)$ im Zähler

$$\frac{f(xy) - f(x_1 y)}{x - x_1} + \frac{f(x_1 y) - f(x_1 y_1)}{x - x_1} = 0$$

oder

$$\frac{f(xy) - f(x_1 y)}{x - x_1} + \frac{f(x_1 y) - f(x_1 y_1)}{y - y_1} \cdot \frac{y - y_1}{x - x_1} = 0 \quad (17a).$$

Gehen wir hierin zur Grenze $x = x_1$ bzw. $y = y_1$ über, so bedeutet der erste Bruch nichts anderes als den Differentialquotienten von $f(xy)$ nach x bei konstant gedachtem y, der zweite den nach y bei konstant gedachtem x. Diese Differentialquotienten wollen wir als partielle bezeichnen und zum Unterschiede von den bisher betrachteten sog. totalen mit dem Buchstaben ∂ derart schreiben, daß

$$\left.\begin{aligned} \lim \frac{f(xy) - f(x_1 y)}{x - x_1} &= \frac{\partial f}{\partial x} \\ \lim \frac{f(xy) - f(x y_1)}{y - y_1} = \lim \frac{f(x_1 y) - f(x_1 y_1)}{y - y_1} &= \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}\right\} \cdot \quad (17b).$$

In die Gleichung (17a) eingesetzt liefert dies unter Beachtung, daß $\lim \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{dy}{dx}$ ist,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17\,c)$$

oder aufgelöst

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17\,d).$$

4. Beispiel. Ist

$$f(x_1\,y) = (a_1 x + b_1 y)^k + a_2 x^m + b_2 y^n = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

so folgt unter Beachtung von (11 a)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = k\,a_1\,(a_1 x + b_1 y)^{k-1} + m\,a_2\,x^{m-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = k\,b_1\,(a_1 x + b_1 y)^{k-1} + n\,b_2\,y^{n-1}$$

also

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{k\,a_1\,(a_1 x + b_1 y)^{k-1} + m\,a_2\,x^{m-1}}{k\,b_1\,(a_1 x + b_1 y)^{k-1} + n\,b_2\,y^{n-1}} \quad . \quad . \quad (18\,a).$$

5. Beispiel. Zur weiteren Übung möge dem Leser die Differentiation folgender Funktionen dienen, deren Ergebnis $\frac{dy}{dx} = y'$ zur Probe hinzugefügt ist.

$y = a + b\sqrt{x} + cx = a + bx^{\frac{1}{2}} + cx$	$y' = \frac{b}{2\sqrt{x}} + c$
$y = \sqrt{a + bx} = u^{\frac{1}{2}}$	$y' = \frac{b}{2\sqrt{a + bx}}$
$y = \sqrt{a^2 - x^2} = u^{\frac{1}{2}}$	$y' = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$
$y = \sqrt{a + x} + \sqrt{a - x} = u^{\frac{1}{2}} + v^{\frac{1}{2}}$	$y' = \frac{\sqrt{a - x} - \sqrt{a + x}}{2\sqrt{a^2 - x^2}}$
$y = au, \quad x = bu^2 + c$	$y' = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{b}{x - c}}$
$y = (a + bx)\sqrt{c^2 - x^2} = uv$	$y' = \frac{b(c^2 - x^2) - a - bx}{\sqrt{c^2 - x^2}}$
$y = \frac{a + bx}{a - bx} = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{2ab}{(a - bx)^2}$
$y = \sqrt{\frac{a + bx}{a - bx}} = u^{\frac{1}{2}}$	$y' = \frac{ab}{(a - bx)^2}\sqrt{\frac{a - bx}{a + bx}}$
$y^2 + xy + x^2 = 0$	$y' = -\frac{2x + y}{2y + x}$

Ist $y = f(x)$ die Gleichung einer Kurve, so gibt nach Gl. (3) der Differentialquotient $y_1' = f'(x_1) = \operatorname{tg} \tau_1$ für jeden Punkt $x_1 y_1$ den Neigungswinkel τ_1 der Tangente in diesem, ihrem Berührungspunkte P an. Infolgedessen ist die Gleichung der Tangente

$$y - y_1 = (x - x_1) \operatorname{tg} \tau_1 = (x - x_1) f'(x_1) \quad . \quad . \quad (19)$$

und diejenige der Normalen zur Tangente und damit zur Kurve selbst in demselben Punkte

$$y - y_1 = (x_1 - x) \operatorname{cotg} \tau_1 = \frac{x_1 - x}{f'(x)}$$

oder

$$(y - y_1) f'(x_1) = x_1 - x \quad (20).$$

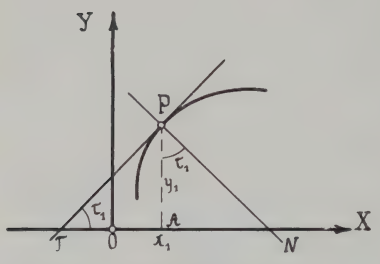

Fig. 56.

Bezeichnet man ferner die Projektion TA der Tangente auf die Abszissenachse als die Subtangente, die der Normalen NA als Subnormale, so sind deren Längen

$$\left.\begin{aligned} TA &= y_1 \operatorname{cotg} \tau_1 = \frac{y_1}{f'(x_1)} \\ NA &= y_1 \operatorname{tg} \tau_1 \quad = y_1 f'(x_1) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21).$$

Ist dagegen die Kurvengleichung in der impliziten Form $f(x\,y) = 0$ gegeben, so ist nach (17 d)

$$\operatorname{tg} \tau_1 = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

und daher die Gleichung der Tangente

$$(y - y_1) \frac{\partial f}{\partial y} + (x - x_1) \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad . \quad . \quad (19\,a),$$

während die Gleichung der Normale

$$(y - y_1) \frac{\partial f}{\partial x} - (x - x_1) \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (20\,a)$$

lautet.

6. Beispiel. Aus der Scheitelgleichung der Parabel $y^2 = 2\,p\,x$ folgt durch Differentiation auf beiden Seiten nach (7 a) $y\,dy = p\,dx$, also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y} = \frac{1}{2}\frac{y}{x}.$$

Mithin ist die Gleichung der Parabeltangente (Fig. 57) im Punkte $x_1 y_1$ nach (19)

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

oder wegen $y_1^2 = 2px_1$

$$y \cdot y_1 = p(x + x_1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21\,a).$$

Der Schnittpunkt B dieser Tangente mit der Ordinatenachse hat mit $x = 0$ die Ordinate $y_0 = \frac{px_1}{y_1} = \frac{y_1}{2}$, während ihr Schnittpunkt T mit der X-Achse die Abszisse $x_0 = -x_1$ hat. Die Entfernung des Brenn-

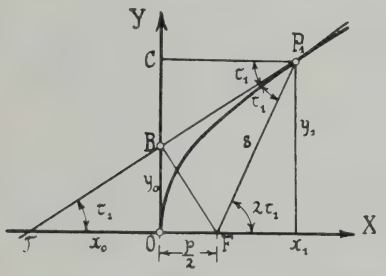

Fig. 57.

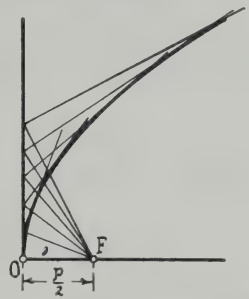

Fig. 58.

punktes F mit der Abszisse $\frac{p}{2}$ von T ist demnach $\frac{p}{2} - x_0 = \frac{p}{2} + x_1$, während der Abstand $FP_1 = s$ aus

$$s^2 = \left(x_1 - \frac{p}{2}\right)^2 + y_1^2 = x_1^2 - px_1 + \frac{p^2}{4} + y_1^2$$

wegen $y_1^2 = 2px_1$ sich ebenfalls zu

$$s = \frac{p}{2} + x_1$$

berechnet. Es ist mithin $TF = FP_1$ und ebenso wegen $2y_0 = y_1$ auch $TB = BP_1$, d h. FTP_1 ist ein gleichschenkliges Dreieck mit der Spitze im Brennpunkt, dessen Höhe FB auf der mit der Ordinatenachse identischen Scheiteltangente die Basis TP_1 trifft. Daraus folgt weiter, daß die Tangente den Winkel FP_1C zwischen dem Brennstrahl FP_1 und der Parallelen zur Achse P_1C halbiert sowie, daß der Fußpunkt B des Lotes FB vom Brennpunkt auf die Tangente stets auf der Scheiteltangente liegt. Diese letztere Eigenschaft erlaubt, wie in Fig. 58 angedeutet, eine

bequeme Konstruktion der Parabel bei vorgelegtem Brennpunktsabstand $\frac{p}{2}$ vom Scheitel O durch »einhüllende Tangenten«.

7. Beispiel. Schreiben wir die Mittelpunktsgleichung der Ellipse (Fig. 59) in der Form

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

und differentieren nach (7a) auf beiden Seiten, so wird daraus

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \cdot \frac{b^2}{a^2}.$$

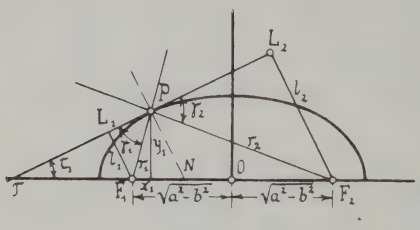

Fig. 59.

Somit ist die Gleichung der Ellipsentangente im Punkte $x_1\, y_1$

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}\frac{b^2}{a^2}(x - x_1)$$

oder, da die Koordinaten $x_1\, y_1$ der Ellipsengleichung (22) ebenfalls genügen, kürzer

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \quad (22\,\text{a}).$$

$$\frac{y\,y_1}{b^2} + \frac{x\,x_1}{a^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22\,\text{b})$$

Diese Tangente schneidet nun die X-Achse im Punkte T mit der Abszisse $OT = x_0 = \frac{a^2}{x_1}$. Verbinden wir den Punkt P mit den beiden Brennpunkten F_1 und F_2, deren Abstände von O durch $\pm\sqrt{a^2 - b^2}$ gegeben sind, und nennen die beiden Brennstrahlen $F_1 P = r_1$, $F_2 P = r_2$, so ist mit Rücksicht auf (22a)

$$\left.\begin{aligned} r_1^2 &= y_1^2 + (\sqrt{a^2 - b^2} - x_1)^2 = \frac{1}{a^2}(a^2 - x_1\sqrt{a^2 - b^2})^2 \\ r_2^2 &= y_1^2 + (\sqrt{a^2 - b^2} + x_1)^2 = \frac{1}{a^2}(a^2 + x_1\sqrt{a^2 - b^2})^2 \end{aligned}\right\} \quad (23).$$

Anderseits sind die Abstände

$$TF_1 = x_0 - \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{1}{x_1}(a^2 - x_1\sqrt{a^2 - b^2})^2$$

$$TF_2 = x_0 + \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{1}{x_1}(a^2 + x_1\sqrt{a^2 - b^2})^2$$

und daher die Lote $F_1 L_1$ und $F_2 L_2$ von den Brennpunkten auf die Tangente mit der Neigung τ_1

$$\left.\begin{aligned} l_1 &= TF_1 \sin\tau_1 = \frac{1}{x_1}(a^2 - x_1\sqrt{a^2 - b^2})\sin\tau_1 \\ l_2 &= TF_2 \sin\tau_1 = \frac{1}{x_1}(a^2 + x_1\sqrt{a^2 - b^2})\sin\tau_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (24).$$

Setzen wir ferner die Winkel der beiden Brennstrahlen r_1 und r_2 mit der Tangente, nämlich $F_1PL_1 = \gamma_1$, $F_2PL_2 = \gamma_2$, so ist

$$\sin\gamma_1 = \frac{l_1}{r_1} = \frac{a}{x_1}\sin\tau_1 = \frac{l_2}{r_2} = \sin\gamma_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25),$$

d. h. $\gamma_1 = \gamma_2$. Die Tangente PT schließt daher mit beiden Brennstrahlen denselben Winkel ein bzw. halbiert im Verein mit der Normale PN die Winkel der Brennstrahlen selbst.

8. Beispiel. Der Leser wird nunmehr leicht die Gleichung der Hyperbeltangente

$$\frac{x\,x_1}{a^2} - \frac{y\,y_1}{b^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

selbst ableiten und die Gültigkeit des letzten Satzes für deren Schnitt mit den Hyperbelbrennstrahlen zu beweisen in der Lage sein.

§ 9. Grundregeln der Integration.

Ist an Stelle einer Gleichung zwischen zwei Veränderlichen $y = f(x)$ der Differentialquotient oder, wie man wohl auch sagt, die Ableitung von y nach x in der Form

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

gegeben, in der $f'(x)$ selbst irgendeine Funktion von x bedeutet, welche nach Fig. 55 die Neigung der Tangente der Kurve $y = f(x)$ für jeden Wert der Abszisse x bestimmt, so ergibt sich an Hand von Fig. 60 der mit der Ordinatendifferenz $y - y_1$ identische Zuwachs der Funktion $f(x)$ durch Summierung aller Differentiale

$$dy = f'(x)\cdot dx = dx\,\mathrm{tg}\,\tau_1 \quad . \quad (1\,\mathrm{a}).$$

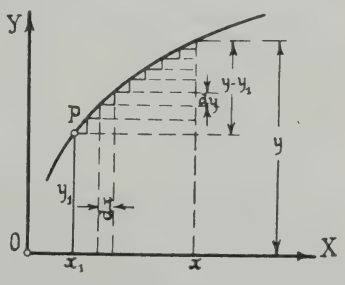

Fig. 60.

Da es sich hierbei stets um eine unendlich große Zahl unendlich kleiner Summanden handelt, so benutzt man — wieder nach dem Vorgang von Leibniz — hierfür ein besonderes Summenzeichen $\int$ und schreibt

$$y - y_1 = \int f'(x)\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Das Ergebnis dieser Summation ist somit die Wiederherstellung der Funktion $f(x)$ aus ihrem Differentialquotienten $f'(x)$, weshalb man dieses Verfahren auch im Gegensatze zu der im vorigen Paragraph betrachteten Differentiation der Funktion $f(x)$ als die Integration der Funktion $f'(x)$ und den in Gl. (2) rechts stehenden Ausdruck als das Integral von $f'(x)$ bezeichnet. Auf der linken Seite von (2) steht nun außer dem Funktionswerte $y = f(x)$ noch die Konstante $y_1 = f(x_1)$, deren Betrag von der Wahl des Ausgangspunktes P_1 (Fig. 60) der Summation abhängt und mit dieser im allgemeinen willkürlich ist. Ersetzen wir diese Konstante daher durch den Buchstaben $-C$, so dürfen wir an Stelle von (2) auch schreiben

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2a)$$

und den Satz aussprechen, daß durch die Integration eine Funktion bis auf eine willkürliche zusätzliche Konstante bestimmt ist, die, wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben, bei der Differentiation wieder verschwindet.

Aus der Verbindung der Formeln (6) und (6a) des vorigen Paragraphen folgt ferner ganz allgemein

$$\int a f'(x)\,dx = a f(x) + C = a \int f'(x)\,dx + C \quad . \quad (3),$$

d. h. ein konstanter Faktor unter dem Integralzeichen kann stets vor dieses gesetzt werden.

Da die Integration somit lediglich die Umkehrung der Differentiation darstellt, so folgt z. B. für $y = ax^n + C$

$$\frac{dy}{dx} = n a x^{n-1}$$

oder

$$y = \int n a x^{n-1} dx$$

und nach Herausnahme des konstanten Faktors an

$$\frac{y}{an} = \int x^{n-1} dx.$$

Setzen wir hierin $n - 1 = m$, also $y = ax^{m+1} + C$, so folgt daraus für das Integral einer Potenz

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{C}{a(m+1)} = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C_1 \quad . \quad (4),$$

worin C_1 eine ebenso willkürliche Konstante ist wie C. Die Gl. (4) gilt ebenso wie die Regel für die Differentiation einer Potenz für alle reellen Werte des Exponenten m bis auf $m = -1$, also $m + 1 = 0$, womit die rechte Seite von (4) ohne Rücksicht auf den Wert von x unendlich groß werden würde. Auf diesen Ausnahmefall werden wir später ausführlich zurückkommen.

Ist der Differentialquotient in der Form

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{f'(x)}{F'(y)}$$

gegeben, so dürfen wir hierfür nach Gl. (7) und (7a) auch schreiben

$$f'(x)\,dx \mp F'(y)\,dy = 0$$

oder unter Hinzufügung der willkürlichen Konstanten C.

$$\int [f'(x)\,dx \mp F'(y)\,dy] = f(x) \mp F(y) + C$$

$$\int [f'(x)\,dx \mp F'(y)\,dy] = \int f'(x)\,dx \mp \int F'(y)\,dy + C \quad . \quad (5),$$

d. h. man integriert nach Trennung der Funktionen beider Veränderlichen über jede derselben, womit zugleich der Satz bewiesen ist, daß das Integral der Summe oder Differenz zweier Funktionen gleich der Summe oder Differenz der Einzelintegrale dieser Funktionen ist.

1. Beispiel. So liefert die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

oder

$$x\,dx + y\,dy = 0$$

durch Integration nach (4) und (5)

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$$

oder mit $2C = a^2$

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

also die Gleichung eines Kreises.

Häufig ist die vorgelegte Ableitung $\frac{dy}{dx} = F'(x)$ keine so einfache Funktion von x, daß man ihr Integral sofort als Umkehrung erkennt. In diesem Falle empfiehlt sich die Einführung (Substitution) einer neuen Veränderlichen u, welche mit x durch die Beziehung

$$x = f(u)$$

zusammenhängt, aus der

$$dx = f'(u)\,du$$

folgt. Damit wird dann das gesuchte Integral

$$y = \int F'(x)\,dx = \int F'[f(u)]\,f'(u)\,du \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

in dem natürlich der Ausdruck $F'[f(u)]\,f'(u)$ einfacher ausfallen, d. h. bequemer zu integrieren sein muß als $F'(x)$, wenn die Substitution von u von Nutzen sein soll.

2. Beispiel. Setzt man in dem Integrale

$$y = \int (a + bx)^m\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

$$a + bx = u,$$

oder

$$x = f(u) = \frac{u - a}{b}, \quad dx = \frac{du}{b}$$

so folgt analog (4)

$$y = \frac{1}{b}\int u^m\,du = \frac{u^{m+1}}{b(m+1)} + C = \frac{(a + bx)^{m+1}}{b(m+1)} + C \quad (7\text{a}).$$

Eine weitere Vereinfachung von Integralen erzielt man gelegentlich durch Umkehrung der Produktenregel für die Differentiation, Gl. (13) bis (13d) des vorigen Paragraphen, für die wir mit $y = uv$ unter Kürzung des in den Nennern stehenden Differentials dx schreiben dürfen

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$

oder integriert unter Weglassung der zusätzlichen Konstanten

$$uv = \int u\,dv + \int v\,du.$$

Daraus folgt umgekehrt

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

worin u und v beliebige Funktionen einer und derselben Veränderlichen x sein können. Die hierdurch ausgedrückte Regel bezeichnet man als die Integration nach Teilen oder als teilweise Integration.

3. Beispiel. Hiernach setzen wir in

$$y = \int (a + bx)^m x\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

$$(a + bx)^m\,dx = dv, \qquad u = x$$

also

$$y = \int x\,dv = xv - \int v\,dx$$

oder mit Rücksicht auf das 2. Beispiel

$$y = \frac{x(a + bx)^{m+1}}{b(m+1)} - \int \frac{(a + bx)^{m+1}}{b(m+1)}\,dx$$

Hierin aber kann das zweite Integral rechts wieder nach dem zweiten Beispiel ausgeführt werden, so daß wir schließlich erhalten

$$y = \int (a+bx)^m \, x\,dx = \frac{x(a+bx)^{m+1}}{b\,(m+1)} - \frac{(a+bx)^{m+2}}{b^2(m+1)(m+2)} + C \quad (9a).$$

4. Beispiel. Ist dagegen

$$y = \int (a+bx^2)^m \, x\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

vorgelegt, so setze man

$$x^2 = u, \quad x\,dx = \frac{1}{2}\,du$$

und erhält mit Rücksicht auf das 2. Beispiel. ohne teilweise Integration

$$y = \frac{1}{2}\int (a+bu)^m \, du = \frac{(a+bu)^{m+1}}{2\,b\,(m+1)} + C = \frac{(a+bx^2)^{m+1}}{2\,b\,(m+1)} + C \quad (10a).$$

Weitere Anwendungen ergeben sich aus der Umkehrung der Formeln im 5. Beispiel des Paragraphen 8.

Multiplizieren wir die Ordinate y einer Kurve BP (Fig. 61) mit dem auch als Element bezeichneten Differential dx der Abszisse, so stellt dieses Produkt $y\,dx$ den unendlich schmalen, in Fig. 61 schraffierten Flächenstreifen AP zwischen der Kurve und der Abszissenachse dar. Danach ist

$$F_x = \int y\,dx \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

bis auf eine willkürliche Konstante die Fläche $OAPB$, weshalb man die Integration auch manchmal nach Newton als Quadratur bezeichnet. Durch Anwendung der teilweisen Integration auf (11) erhält man weiter

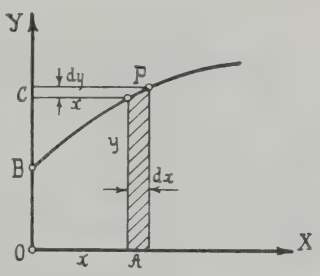

Fig. 61.

$$F_x = yx - \int x\,dy = xy - F_y \quad . \quad . \quad . \quad (11a),$$

worin

$$F_y = \int x\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11b)$$

offenbar die Fläche BPC bedeutet, die sich somit mit $OAPB$ zu dem Rechteck $OAPC = xy$ ergänzt.

Aus den Formeln (11) und (11b) folgt durch Umkehrung

$$y = \frac{dF_x}{dx}, \quad x = \frac{dF_y}{dy} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11c),$$

wonach also die Ordinate bzw. die Abszisse einer Kurve als

Differentialquotienten ihrer Fläche über der Abszissen- bzw. Ordinatenachse erscheinen.

Bei der Ausführung der Integration in Gl. (11) ist natürlich vorausgesetzt, daß $y = f(x)$ als Funktion von x vorgelegt ist, wonach sich dann auch das Integral, d. h. die Fläche

$$F_x = F(x) + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

als eine Funktion des Wertes von x ergibt, bis zu dem sich die Summierung der Flächenstreifen $y\,dx$ erstreckt, während die Konstante C, wie wir oben sahen, durch die Anfangsabszisse der Summierung gegeben ist. Bezeichnen wir den Endwert einmal mit x_1, dann mit x_2, so erhalten wir durch die Integration zwei Flächen

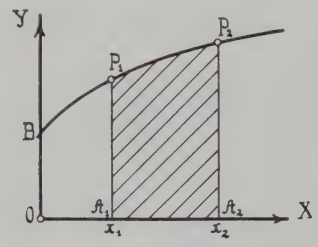

Fig. 62.

$$OA_1P_1B = F_{x_1} = F(x_1) + C$$
$$OA_2P_2B = F_{x_2} = F(x_2) + C,$$

deren Differenz die in Fig. 62 schraffierte Fläche $A_1A_2P_2P_1$ darstellt, für die wir somit auch

$$F_{12} = F(x_2) - F(x_1)$$

unter Wegfall der Konstanten C schreiben können. Wir erhalten also die zwischen zwei Abszissenendpunkten liegende Fläche, wenn wir die Werte des Integrals (11) für die beiden sog. Grenzen x_1 und x_2 voneinander abziehen, was wir durch die Schreibweise

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

andeuten, in der wir das Integral als ein bestimmtes bezeichnen. Man übersieht sofort, daß diese Betrachtung nicht nur für die Flächenberechnung gilt, sondern daß man durch Einschließen zwischen zwei Grenzen bestimmte Integrale beliebiger Funktionen $y = f(x)$ nach der Formel (13) erhält.

5. Beispiel. Die Fläche OAP zwischen der Parabel $y^2 = 2px$ und der Abszissenachse (Fig. 63) berechnet sich hiernach zu

$$F_{x_1} = \int_0^{x_1} y\,dx = \sqrt{2p}\int_0^{x_1} x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{2p}\,x_1^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x_1y_1 \quad . \quad (14),$$

d. h. zu 2/3 des Rechtecks $OAPB$, während die Fläche $A_1A_2P_2P_1$ auf gleiche Weise

$$F_{1\,2} = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx = \frac{2}{3}(x_2 y_2 - x_1 y_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14\,a)$$

wird, also 2/3 der Differenz der Rechtecke $OA_2P_2B_2$ und $OA_1P_1B_1$ beträgt.

6. Beispiel. Die zwischen den Abszissen x_1 und x_2 einer sog. polytropischen Kurve

$$y x^{\mu} = y_1 x_1^{\mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

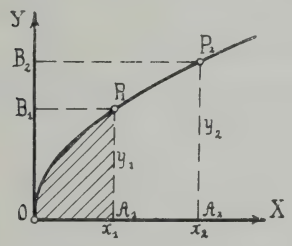

Fig. 63.

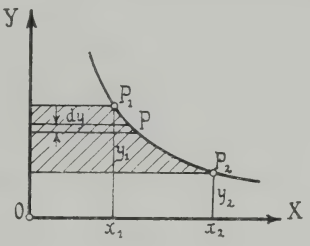

Fig. 64.

und der Ordinatenachse eingeschlossene, in Fig. 64 schraffierte Fläche ist

$$F = \int_{y_2}^{y_1} x\,dy = -\mu y_1 x_1^{\mu} \int_{x_2}^{x_1} x^{-\mu}\,dx = \frac{\mu}{\mu - 1} y_1 x_1^{\mu}(x_1^{1-\mu} - x_2^{1-\mu})$$

oder

$$F = \frac{\mu}{\mu - 1} x_1 y_1 \left(1 - \left[\frac{x_1}{x_2}\right]^{\mu - 1}\right) = \frac{\mu x_1 y_1}{\mu - 1}\left(1 - \left[\frac{y_2}{y_1}\right]^{\frac{\mu - 1}{\mu}}\right) \quad (15\,a).$$

Die durch Gl. (15) gegebene Kurve spielt mit dem Ausdrucke für ihre Fläche eine große Rolle in der Wärmelehre, da durch sie mit verschiedenen Werten des Exponenten μ die Zustandsänderungen von Gasen, d. h. der Zusammenhang zwischen deren Druck y und Volumen x der Gewichtseinheit dargestellt werden

§ 10. Höhere Differentialquotienten und Potenzreihen.

Da der Differentialquotient einer Funktion $y = f(x)$, d. h.

$$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

wie schon in § 8 betont wurde, selbst wieder eine Funktion von x ist, so kann er, wie $f(x)$ selbst, ebenfalls nach x differentiert werden, woraus der sog. zweite Differentialquotient

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dy'}{dx} = \frac{df'(x)}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1a)$$

resultiert, für den man mit $d(dy) = d^2y$ und $dx\,dx = dx^2$ sowie unter Benutzung von zwei Strichen analog dem einen in Gl. (1) auch schreibt

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = f''(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1b).$$

Wiederholt man das Verfahren an dieser Formel, so ergibt sich der dritte Differentialquotient

$$\frac{d^3y}{dx^3} = y''' = f'''(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1c)$$

und schließlich bei n-maliger Wiederholung der n-te Differentialquotient oder die n-te Ableitung

$$\frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)} = f^{(n)}(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1d).$$

Die in diesen höheren Ableitungen auftretenden Differentiale oder Elemente d^2y, $d^3y \ldots d^ny$ bezeichnet man demgemäß als Differentiale zweiter, dritter, n-ter Ordnung, da sie mit den Potenzen gleicher Ordnung $dx^2 = (dx)^2$, $dx^3 = (dx)^3, \ldots$ $dx^n = (dx)^n$ dividiert endliche Werte, nämlich die entsprechenden Differentialquotienten, ergeben. Es braucht wohl kaum bemerkt zu werden, daß für die Berechnung einer höheren Ableitung aus der nächst niederen dieselben Regeln gelten wie für diejenige des ersten Differentialquotienten aus der Funktion selbst.

1. Beispiel. Daher erhält man aus $y = ax^n$ mit ganzen positiven Exponenten n

$$\left.\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = anx^{n-1} \\ y'' &= \frac{d^2y}{dx^2} = a(n-1)nx^{n-2} \\ y''' &= \frac{d^3y}{dx^3} = a(n-2)(n-1)nx^{n-3} \\ &\cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \\ y^{(n)} &= \frac{d^ny}{dx^n} = an!\,x^{n-n} = an! \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

wenn das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n = n!$ gesetzt wird. Bei der Fortsetzung des Verfahrens erhält man $y^{(n+1)} = 0$ und damit verschwinden alle weiteren Ableitungen. Ist dagegen der Exponent n keine ganze

positive Zahl, so hat die Reihe der höheren Ableitungen kein Ende, da es einen n-ten Differentialquotienten hierbei gar nicht geben kann.

2. Beispiel. Ist umgekehrt ein höherer Differentialquotient, also etwa

$$\frac{d^3y}{dx^3} = y''' = f'''(x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

vorgelegt, worin

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{dy''}{dx} \text{ oder } dy'' = y'''\,dx = f'''(x)\,dx$$

ist, so folgt daraus durch Integration unter Hinzufügung einer Konstanten C_1

$$y'' = \int f'''(x)\,dx + C_1 = f''(x) + C_1$$

und durch weitere Integration wegen $dy' = y''\,dx$ mit einer zweiten Konstanten C_2

$$y' = \int [f''(x) + C_1]\,dx = f'(x) + C_1 x + C_2.$$

Integrieren wir schließlich noch diesen Ausdruck mit $dy = y'\,dx$, so wird mit einer dritten Konstante C_3

$$y = \int [f'(x) + C_1 x + C_2]\,dx + C_3$$

oder

$$y = f(x) + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3 \quad \ldots\ldots \quad (3\,a),$$

d. h. durch jede Integration vermehrt sich der Ausdruck um ein neues mit einer Konstanten behaftetes Glied.

Die Einfachheit in der Behandlung von Potenzen einer Veränderlichen legt es nahe, beliebige Funktionen durch Summen solcher Potenzen mit ganzzahligen positiven Exponenten und konstanten Koeffizienten $A_0 A_1 A_2 \ldots A_n$ darzustellen, also

$$y = f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_k x^k + \ldots + A_n x^n \quad (4)$$

zu schreiben. Alsdann bestimmt sich der erste Koeffizient A_0 dieser sog. Potenzreihe dadurch, daß für $x = 0$ alle weiteren Glieder verschwinden, während $f(x) = f(0)$ wird, d. h. den Wert der Funktion für $x = 0$ annimmt, zu

$$A_0 = f(0).$$

Differentieren wir die Gl. (4) einmal, so folgt unter Wegfall von A_0

$$y' = f'(x) = A_1 + 2A_2 x + \ldots + k A_k x^{k-1} + \ldots + n A_n x^{n-1}$$

und für $x = 0$ nach Verschwinden aller höheren Glieder

$$A_1 = f'(0).$$

Setzen wir dieses Verfahren fort, so erhalten wir

$$1 \cdot 2\, A_2 = 2!\, A_2 = f''(0)$$
$$1 \cdot 2 \cdot 3\, A_3 = 3!\, A_3 = f'''(0)$$
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k\, A_k = k!\, A_k = f^{(k)}(0)$$
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n A_n = n!\, A_n = f^{(n)}(0),$$

so daß wir auch für die Potenzreihe (4) schreiben dürfen

$$y = f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots \frac{x^k}{k!} f^k(0) \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) \quad (4\,a).$$

Diese Reihe bricht mit dem n-ten Gliede ab, wenn $f^{(n)}(x) =$ konst wird, andernfalls wird die Zahl ihrer Glieder unendlich groß. Ihre Bildung beruht natürlich auf der Voraussetzung, daß alle Ableitungen für $x = 0$ endliche Werte annehmen.

3. Beispiel. Ist z. B. die Funktion $y = (a + bx)^n$ vorgelegt, so folgt

$$f(x) = (a+bx)^n, \quad f(0) = a^n,$$
$$f'(x) = n\,b\,(a+bx)^{n-1}, \quad f'(0) = n\,a^{n-1} b,$$
$$f''(x) = n\,(n-1)\,b^2 (a+bx)^{n-2}, \quad f''(0) = n\,(n-1)\,a^{n-2} b^2,$$
$$f^{(k)}(x) = n\,(n-1)\,(n-2) \ldots (n-k+1)\, b^k\, (a+bx)^{n-k},$$
$$f^{(k)}(0) = n\,(n-1) \ldots (n-k+1)\, a^{n-k} b^k \text{ usw.}$$

Schreiben wir abkürzungsweise

$$\frac{n\,(n-1)\,(n-2) \ldots (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k} \quad \ldots \quad (5)$$

(gesprochen n über k), so erhalten wir die Potenzreihe

$$(a+bx)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} bx + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 x^2 + \ldots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k x^k + \ldots \quad (6),$$

welche für ganz positive n mit dem Gliede $\binom{n}{n} \cdot b^n x^n = b^n x^n$ abbricht, für negative und gebrochene Exponenten n dagegen unendlich viele Glieder besitzt. Für $x = 1$ vereinfacht sich (6) in die sog. Binomialreihe

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \ldots \quad (6\,a),$$

in der die Faktoren

$$\binom{n}{1}, \quad \binom{n}{2} \ldots \binom{n}{k} \ldots$$

als Binomialkoeffizienten bezeichnet werden, während der ganze Ausdruck (6a) den sog. binomischen Lehrsatz der Entwickelbarkeit der Potenz eines Binoms in eine Reihe darstellt.

4. Beispiel. Schreiben wir den Ausdruck (6) in der Form

$$y = (a + bx)^n = a^n \left(1 + \frac{bx}{a}\right)^n \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

und setzen abkürzungsweise

$$\frac{bx}{a} = u \quad \ldots \ldots \quad (7a),$$

so folgt

$$\frac{y}{a^n} = (1+u)^n = 1 + \binom{n}{1} u + \binom{n}{2} u^2 + \ldots \quad \ldots \quad (8b).$$

Ist hierin u absolut stets viel kleiner als 1, so trifft dies in noch viel höherem Maße für u^2, u^3 usw. zu, so daß auch die damit behafteten Glieder sehr klein gegen die Einheit ausfallen und bei angenäherten Rechnungen, die in der Physik eine große Rolle spielen, vernachlässigt werden dürfen. Demgemäß bezeichnet man

$$(1+u)^n \backsim 1 + nu \quad \ldots \ldots \quad (7c)$$

als die erste Annäherung und

$$(1+u)^n \backsim 1 + nu + \frac{n(n-1)}{2} u^2 \quad \ldots \quad (7d)$$

als die zweite Annäherung der Funktion $(1+u)^n$ für $u < 1$. Hiernach ist z. B. in erster Annäherung für $u < 1$

$$\sqrt{1 \pm u} = 1 \pm \frac{u}{2}$$

$$\frac{1}{1 \pm u} = 1 \mp u \text{ usw.}$$

5. Beispiel. Setzen wir in der Reihe

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} x^k + \ldots$$

$$x = \frac{1}{n}$$

so geht sie über in

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{2!} + \ldots \frac{1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{k+1}{n}\right)}{k!} + \ldots \quad (8).$$

Lassen wir hierin n immer mehr wachsen, so werden die Brüche

$$\frac{1}{n}, \quad \frac{2}{n} \ldots \frac{k+1}{n} \ldots$$

immer kleiner gegen 1 und verschwinden schließlich für die Grenze $n = \infty$, so daß wir für diesen Fall die unendliche Reihe

$$\lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{k!} + \ldots \quad (8a)$$

erhalten, deren Glieder ersichtlich rasch abnehmen. Die hierdurch bestimmte irrationale Zahl, deren Bedeutung in der Folge noch hervor-

treten wird, bezeichnet man mit dem Buchstaben e und erhält dafür durch Summierung einiger Glieder

$$e = \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}7\,182818 \ldots\ldots \quad (8\,\text{b}).$$

6. Beispiel. Ist die zweite Ableitung einer Funktion in der Form

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = ky \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

gegeben, so folgt daraus durch Multiplikation mit dy wegen $dy = y'\,dx$

$$y'\,dy' = ky\,dy$$

oder integriert mit einer Konstante C

$$y'^2 = ky^2 + C \ldots\ldots\ldots \quad (9\,\text{a}).$$

Setzen wir nun fest, daß für $x = 0$, $y = y_0$ sein soll und schreiben außerdem $k = \alpha^2$ für positive k, so folgt für $x = 0$,

$$\left.\begin{array}{ll} y' = \sqrt{\alpha^2 y^2 + C} & = \sqrt{\alpha^2 y_0^2 + C} \\ y'' = \alpha^2 y & = \alpha^2 y_0 \\ y''' = \alpha^2 y' & = \alpha^2 \sqrt{\alpha^2 y_0^2 + C} \\ y^{(\text{IV})} = \alpha^2 y'' & = \alpha^2 y_0 \end{array}\right\} \text{usw.} \quad (9\,\text{b})$$

und wir erhalten als Integral von (9), d. h. von $y'' = \alpha^2 y$ mit Rücksicht auf Gl. (4 a) die Potenzreihe

$$y = y_0\left(1 + \frac{\alpha^2 x^2}{2!} + \frac{\alpha^4 x^4}{4!} + \frac{\alpha^6 x^6}{6!} \ldots\ldots\right) + \frac{\sqrt{\alpha^2 y_0^2 + C}}{\alpha}\left(\alpha x + \frac{\alpha^3 x^3}{3!} + \frac{\alpha^5 x^5}{5!} \ldots\ldots\right) \ldots \quad (9\,\text{c})$$

mit den beiden willkürlichen Konstanten y_0 und C. Ist dagegen k in Gl. (9) negativ, so hätten wir dafür zu setzen $k = -\alpha^2$ und erhalten damit als Integral von $y'' = -\alpha^2 y$ die Reihe

$$y = y_0\left(1 - \frac{\alpha^2 x}{2!} + \frac{\alpha^4 x^4}{4!} - \frac{\alpha^6 x^6}{6!} + \ldots\ldots\right) + \frac{\sqrt{C - \alpha^2 y_0^2}}{\alpha}\left(\alpha x - \frac{\alpha^3 x^3}{3!} + \frac{\alpha^5 x^5}{5!} - \ldots\ldots\right) \quad (9\,\text{d}).$$

Die Bedeutung der in Klammern stehenden Reihen werden wir noch kennen lernen.

§ 11. Exponentialfunktionen und Logarithmen.

Der Differentialquotient der Exponentialfunktionen

$$y = a^x \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

in der a eine beliebige Konstante bedeutet, ist nach § 8

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{y - y_1}{x - x_1} = \lim \frac{a^x - a^{x_1}}{x - x_1} = a^{x_1} \lim \frac{a^{x - x_1} - 1}{x - x_1} \quad (1\,\text{a}).$$

Da hierin a^{x-x_1} für immer kleiner werdende Differenzen $x - x_1$ sich der Grenze 1 nähert, so dürfen wir noch vor dem Grenzübergang mit einer großen Zahl n

$$a^{x-x_1} - 1 = \frac{1}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$a^{x-x_1} = 1 + \frac{1}{n}$$

und daher

$$(x - x_1) \lg a = \lg\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2a)$$

setzen, ohne zunächst über die Basis dieser Logarithmen etwas auszusagen. Dies liefert also in (1a) eingeführt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^{x_1} \lg n}{\lim\left[n \lg\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]} = \frac{a^{x_1} \lg a}{\lim\left[\lg\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]}$$

oder nach dem Grenzübergange, d. h. für $x = x_1$ und $n = \infty$ mit Rücksicht auf die Gl. (8b) im 5. Beispiel des § 10

$$\frac{dy}{dx} = a^x \frac{\lg a}{\lg e} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Wählen wir nun als Basis des Logarithmensystems die oben definierte Zahl $e = 2{,}71828..$, so wird deren Logarithmus selbst = 1, und wir erhalten, indem wir die so definierten Logarithmen als natürliche durch lgn bezeichnen, an Stelle von (1b)

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(a^x)}{dx} = a^x \operatorname{lgn} a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3a)$$

oder umgekehrt

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\operatorname{lgn} a} + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3b).$$

Ist im Sonderfalle $a = e$, so folgt aus $y = e^x$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(e^x)}{dx} = e^x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3c)$$

und umgekehrt

$$\int e^x dx = e^x + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3d).$$

1. Beispiel: Aus $y = f(x) = a^x$ folgt zunächst $f(0) = a^0 = 1$ und durch Differentiation für $x = 0$

$$y' = f'(x) = a^x \operatorname{lgn} a, \quad f'(0) = \operatorname{lgn} a$$
$$x'' = f''(x) = a^x (\operatorname{lgn} a)^2, \quad f''(0) = (\operatorname{lgn} a)^2.$$

Dies liefert mit der Gl. (4a) des § 10 die unendliche Potenzreihe

$$a^x = 1 + \frac{x}{1} \lg n a + \frac{x^2}{2!} (\lg n a)^2 + \frac{x^3}{3!} (\lg n a)^3 + \ldots \quad (4),$$

aus der für $a = e$ mit $\lg n\, e = 1$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \ldots \quad (4a)$$

und schließlich für $x = 1$ wieder die Reihe (8a) § 10 hervorgeht.

2. Beispiel. Setzen wir in Gl. (4a) $\pm \alpha x$ an Stelle von x, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} e^{\alpha x} &= 1 + \frac{\alpha x}{1} + \frac{\alpha^2 x^2}{2!} + \frac{\alpha^3 x^3}{3!} + \frac{\alpha^4 x^4}{4!} + \ldots \\ e^{-\alpha x} &= 1 - \frac{\alpha x}{1} + \frac{\alpha^2 x^2}{2!} - \frac{\alpha^3 x^3}{3!} + \frac{\alpha^4 x^4}{4!} - \ldots \end{aligned}\right\} \quad (5).$$

Durch Addition und Subtraktion dieser beiden Gleichungen ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{2} &= 1 + \frac{\alpha^2 x^2}{2!} + \frac{\alpha^4 x^4}{4!} + \ldots \\ \frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{2} &= \frac{\alpha x}{1} + \frac{\alpha^3 x^3}{3!} + \frac{\alpha^5 x^5}{5!} + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (5a)$$

Dies sind aber die beiden Reihen in der Gl. (9c) des sechsten Beispiels von § 10, so daß wir an deren Stelle als Integral von $y'' = \alpha^2 y$ auch

$$y = \frac{y_0}{2} (e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}) + \frac{\sqrt{\alpha^2 y_0^2 + C}}{2\alpha} (e^{\alpha x} - e^{-\alpha x})$$

schreiben dürfen. Setzen wir hierin abkürzungsweise

$$\frac{\alpha y_0 + \sqrt{\alpha^2 y_0^2 + C}}{2\alpha} = A, \quad \frac{\alpha y_0 - \sqrt{\alpha^2 y_0^2 + C}}{2\alpha} = B,$$

substituieren also an Stelle der Konstanten y_0 und C die ebenso willkürlichen Werte A und B, so lautet das Integral von $y'' = \alpha^2 y$

$$y = A e^{\alpha x} + B e^{-\alpha x} \quad \ldots \ldots \quad (6),$$

von dessen Richtigkeit man sich noch durch zweimalige Ableitung überzeugen kann. Auf dieselbe Weise erhält man mit $\sqrt{-1} = i$ an Stelle der Gl. (9d) § 10 als Lösung von $y'' = -\alpha^2 y$

$$y = A' e^{\alpha i x} + B' e^{-\alpha i x} \quad \ldots \ldots \quad (6a).$$

Diese Umformung sowie die Bestimmung der Konstanten A' und B' aus y_0 und C der Gl. (9d) § 10 möge dem Leser als Übung überlassen bleiben.

Die Funktion

$$y = \lg n\, x \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

ist nach dem Vorstehenden nichts als die Umkehrung von $x = e^y$, deren Differentiation

$$\frac{dx}{dy} = e^y = x$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\lg n\, x)}{dx} = \frac{1}{x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7a)$$

ergibt, woraus wiederum

$$\int \frac{dx}{x} = \lg n\, x + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7b)$$

folgt. Damit ist zugleich der in der Bemerkung zur Gl. (4) des § 9 erwähnte Ausnahmefall der Integration von $f'(x) = x^{-1}$ erledigt, der anscheinend einen unendlichen Betrag lieferte.

Haben wir an Stelle von (7) allgemeiner

$$y = \lg n\, u, \quad u = f(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

so folgt nach den Regeln des § 8

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8a)$$

und umgekehrt

$$\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \lg n\, f(x) + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8b).$$

Steht also unter dem Integralzeichen ein Bruch, dessen Zähler die Ableitung des Nenners bildet, beides als Funktionen von x gedacht, so ist das Integral bis auf eine willkürliche Konstante der natürliche Logarithmus des Nenners.

Sind u und v zwei Funktionen der Veränderlichen x, so war nach dem Multiplikationssatze des § 8

$$d(uv) = v\,du + u\,dv$$

oder nach Division mit uv

$$\frac{d(uv)}{uv} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v}.$$

Dies liefert integriert

$$\int \frac{d(uv)}{uv} = \int \frac{du}{u} + \int \frac{dv}{v}$$

oder nach (8b)

$$\lg n\,(uv) = \lg n\, u + \lg n\, v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8c)$$

ein Ergebnis, welches nichts anderes als die bekannte Fundamentaleigenschaft der Logarithmen als Exponenten ihrer Basis, die in unserem Falle die Zahl e ist, ausdrückt und ohne weiteres auf das Produkt beliebig vieler Funktionen u, v, w usw. ausgedehnt werden kann.

Ist das Integral

$$y = \int \lg n\, x\, dx$$

auszuwerten, so hat man nach den Regeln der partiellen Integration

$$\begin{aligned}\int \lg n\ x\, dx &= x \lg n\, x - \int x\, d(\lg n\, x) \\ &= x \lg n\, x - \int dx = x(\lg n\, x - 1) + C \quad (9).\end{aligned}$$

3. Beispiel. Versuchen wir nach den Regeln des § 10 die Funktion $y = \lg n\, x$ in eine Potenzreihe zu entwickeln, so erhalten wir wegen $f(0) = -\infty$, $f'(0) = \infty$ usw. lauter unendlich große Glieder im Einklang mit der Integration von x^{-1} nach der Potenzregel, so daß dieses Verfahren hier versagt. Schreiben wir dagegen $a + x$ für x, so folgt für $x = 0$

$$\begin{aligned} y &= \lg n(a+x), & f(0) &= \lg n\, a \\ y' &= \frac{1}{a+x}, & f'(0) &= \frac{1}{a} \\ y'' &= -\frac{1}{(a+x)^2}, & f''(0) &= -\frac{1}{a^2} \\ y''' &= \frac{2}{(a+x)^3}, & f'''(0) &= \frac{2}{a^3} \\ y^{(IV)} &= -\frac{2\cdot 3}{(a+x)^4}, & f^{IV}(0) &= -\frac{2\cdot 3}{a^4} \text{ usw.} \end{aligned}$$

Mithin erhalten wir

$$\lg n\,(a+x) = \lg n\, a + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \frac{x^5}{5a^5} - \ldots \quad (10)$$

und ebenso

$$\lg n\,(a-x) = \lg n\, a - \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} - \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} - \frac{x^5}{5a^5} - \ldots \quad (10a)$$

Durch Subtraktion dieser Gleichungen ergibt sich dann

$$\frac{1}{2} \lg n \frac{a+x}{a-x} = \frac{x}{a} + \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} + \ldots \quad (10b)$$

und durch Addition wegen $(a+x)(a-x) = a^2 - x^2$

$$\frac{1}{2} \lg n\,(a^2 - x^2) = \lg n\, a - \frac{x^2}{2a^2} - \frac{x^4}{4a^4} - \frac{x^6}{6a^6} - \ldots \quad (10c).$$

Setzt man in diesen Ausdrücken noch $a = 1$, so erhält man bequeme Reihen zur Berechnung der natürlichen Logarithmen beliebiger Zahlen.

Schreiben wir schließlich in der Gl. (10b)

$$a + x = u, \quad a - x = v$$

oder

$$2x = u - v, \quad 2a = u + v$$

so wird daraus die häufig vorkommende Reihe

$$\frac{1}{2} \lg n \frac{u}{v} = \left(\frac{u-v}{u+v}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{u-v}{u+v}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{u-v}{u+v}\right)^5 + \cdot \cdot \quad (10\,d).$$

4. Beispiel. Ist der Zähler unter dem Integralzeichen nicht mit dem Differentialquotienten des Nenners identisch, so kann man ihn häufig dazu ergänzen. So ist

$$\int \frac{a+x}{b+x}\,dx = \int \frac{a-b+b+x}{b+x}\,dx = (a-b)\int \frac{dx}{b+x} + \int dx$$
$$= (a-b) \lg n (b+x) + x + C$$

oder auch

$$\int \frac{x^2\,dx}{x+a} = \int \frac{x^2 - a^2 + a^2}{x+a}\,dx = \int \frac{x^2 - a^2}{x+a}\,dx + a^2 \int \frac{dx}{x+a}$$
$$= \int (x-a)\,dx + a^2 \int \frac{dx}{x+a} = \frac{x^2}{2} - ax + a^2 \lg n (x+a) + C$$

Steht unter dem Integral ein Ausdruck von der Form

$$\frac{x+a}{x^2 + bx + c} = \frac{x+a}{(x-x_1)(x-x_2)},$$

worin

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$$

die Wurzeln der Gleichung $x^2 + bx + c = 0$ bedeuten, so zerlege man den Ausdruck in zwei sog. Partialbrüche mit den unbestimmten Koeffizienten A und B, so zwar daß

$$\frac{x+a}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} = \frac{(A+B)x - (Ax_2 + Bx_1)}{(x-x_1)(x-x_2)},$$

woraus durch Vergleich der einzelnen Glieder im Zähler

$$A + B = 1, \quad Ax_2 + Bx_1 = -a$$

also

$$A = \frac{x_1 + a}{x_1 - x_2}, \quad B = \frac{x_2 + a}{x_2 - x_1}$$

sich berechnet. Mithin ist

$$\int \frac{(x+a)\,dx}{x^2+bx+c} = \int \frac{(x+a)\,dx}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{x_1+a}{x_1-x_2} \lg n\,(x-x_1) + \frac{x_2+a}{x_2-x_1} \lg n\,(x-x_2) + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Diese Methode versagt übrigens für gleiche Wurzeln $x_1 = x_2$, mit denen A und B unendlich groß werden. Alsdann hat man

$$\frac{(x+a)}{(x-x_1)^2} = \frac{x-x_1+x_1+a}{(x-x_1)^2} = \frac{1}{x-x_1} + \frac{x_1+a}{(x-x_1)^2}$$

also

$$\int \frac{(x+a)\,dx}{(x-x_1)^2} = \int \frac{dx}{x-x_1} + (x_1+a)\int \frac{dx}{(x-x_1)^2} = \lg n\,(x-x_1) - \frac{x_1+a}{x-x_1} + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11\,a).$$

Setzen wir die im 2. Beispiel vorkommenden Ausdrücke (s^u) mit $ax = u$

$$\frac{e^u + e^{-u}}{2} = \xi, \quad \frac{e^u - e^{-u}}{2} = \eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12),$$

so folgt daraus durch Quadrieren

$$e^{2u} + 2 + e^{-2u} = 4\xi^2,$$
$$e^{2u} - 2 + e^{-2u} = 4\eta^2$$

oder

$$\xi^2 - \eta^2 = 1 \quad (12\,a).$$

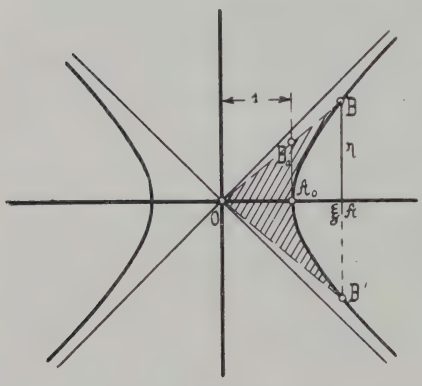

Fig. 65.

Dies ist aber die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel (Fig. 65) mit der halben Hauptachse $OA_0 = 1$, weshalb man die Ausdrücke (12), die sich in ähnlicher Weise zu 1 ergänzen, wie die Kreisfunktionen Cosinus und Sinus, als hyperbolische Cosinus und Sinus bezeichnet und

$$\left.\begin{aligned} OA &= \xi = \mathfrak{Cos}\,u \text{ oder } \cosh u \\ AB &= \eta = \mathfrak{Sin}\,u \text{ oder } \sinh u \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (12\,b)$$

sowie analog den trigonometrischen Tangens und Cotangens die hyperbolischen Funktionen

$$\left.\begin{aligned} A_0B_0 &= \frac{\eta}{\xi} = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} = \mathfrak{Tg}\,u \text{ oder } \mathrm{tg\,h}\,u \\ \frac{1}{A_0B_0} &= \frac{\xi}{\eta} = \frac{e^u + e^{-u}}{e^u - e^{-u}} = \mathfrak{Cotg}\,u \text{ od. } \mathrm{cotg\,h}\,u \end{aligned}\right\} . \quad (12\,c)$$

schreibt. Addiert und subtrahiert man die Formeln (12), so folgt mit (12b)

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Cos}\, u + \mathfrak{Sin}\, u &= e^u \\ \mathfrak{Cos}\, u - \mathfrak{Sin}\, u &= e^{-u} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12\,\mathrm{d}).$$

Das Flächenstück A_0AB zwischen dem einen Hyperbelast und der Abszissenachse ist alsdann wegen (12)

$$F = \int_1^{\xi} \eta\, d\xi = \frac{1}{4}\int (e^u - e^{-u})^2\, du = \frac{1}{4}\int (e^{2u} + e^{-2u} - 2)\, du$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{2u} - e^{-2u}}{2} - 2u\right) + C$$

oder, da

$$\frac{e^{2u} - e^{-2u}}{4} = \xi\eta; \quad e^u = \xi + \eta, \quad u = \lg n\,(\xi + \eta)$$

ist, auch nach Einsetzen der Grenzen $\xi\eta$ und $\xi = 1$, $\eta = 0$

$$F = \frac{\xi\eta}{2} - \frac{1}{2}\lg n\,(\xi + \eta) = \frac{\xi\eta}{2} - \frac{u}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Daraus folgt aber, daß die Größe u, das sog. Argument der vier sog. Hyperbelfunktionen (12b) und (12c), durch die in Fig. 65 schraffierte Fläche OBA_0B' dargestellt ist, der bei den Kreisfunktionen ein Kreissektor mit dem Radius 1 entspricht. Für diese Hyperbelfunktionen hat man nun ebenso Tabellen berechnet, wie für die Kreisfunktionen und erhält z. B. für

u	$\mathfrak{Cos}\, u$	$\mathfrak{Sin}\, u$	$\mathfrak{Tg}\, u$	$\mathfrak{Cotg}\, u$
0	1	0	0	∞
1	$\frac{e^2+1}{2e} = 1{,}543$	$\frac{e^2-1}{2e} = 1{,}175$	$\frac{e^2-1}{e^2+1} = 0{,}762$	$\frac{e^2+1}{e^2-1} = 1{,}312$
2	$\frac{e^4+1}{2e^2} = 3{,}762$	$\frac{e^4-1}{2e^2} = 3{,}627$	$\frac{e^4-1}{e^4+1} = 0{,}964$	$\frac{e^4+1}{e^4-1} = 1{,}037$
5	$\frac{e^{10}+1}{2e^5} = 74{,}21$	$\frac{e^{10}-1}{2e^5} = 74{,}20$	$\frac{e^{10}-1}{e^{10}+1} = 0{,}9999$	$\frac{e^{10}+1}{e^{10}-1} = 1{,}0001$
∞	∞	∞	1	1

Daraus erkennt man, daß schon für $u = 5$ die Unterschiede der $\mathfrak{Sin}\, u$ und $\mathfrak{Cos}\, u$ bzw. $\mathfrak{Tg}\, u$ und $\mathfrak{Cotg}\, u$ fast unmerklich geworden sind.

5. Beispiel. Zur Berechnung der Fläche zwischen einem Aste der Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

und der Abszissenachse, hat man nur

$$\frac{x}{a} = \xi, \quad \frac{y}{b} = \eta$$

zu setzen und erhält dann analog (13)

$$F = \int_a^x y\,dx = ab \int_1^\xi \eta\,d\xi = \frac{ab}{2}\left[\xi\eta - \lg(\xi + \eta)\right] \ldots\ldots$$

oder

$$F = \frac{ab}{2}\left[\frac{xy}{ab} - \lg\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\right] \quad \ldots \quad (14\,a).$$

Da nun $y = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ ist, so dürfen wir auch hierfür allgemein schreiben

$$\frac{b}{a}\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx = \frac{ab}{2}\left[\frac{x}{a^2}\sqrt{x^2 - a^2} - \lg\left(\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right)\right] + C \quad (15)$$

oder nach Multiplikation mit $\frac{a}{b}$ und Ersatz von $C\frac{a}{b} + \frac{a^2}{2}\lg a$ durch die neue Konstante C_1

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\lg\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + C_1 \quad (15\,a)$$

und analog durch Ersatz von a^2 durch $-a^2$

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\lg\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C_1 \quad (15\,b),$$

womit zugleich zwei häufig vorkommende Integrale berechnet sind.

Demgegenüber berechnet sich die Fläche der gleichseitigen Hyperbel (Fig. 35) mit der Asymptotengleichung

$$2xy = a^2$$

zwischen zwei Abszissenwerten x_1 und x_2 einfach zu

$$F = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx = \frac{a^2}{2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{x} = \frac{a^2}{2}(\lg x_2 - \lg x_1) = \frac{a^2}{2}\lg\frac{x_2}{x_1} \quad (16).$$

§ 12. Kreis- und zyklometrische Funktionen.

Die Mittelpunktskoordinaten eines Punktes P des Kreises (Fig. 66) mit dem Radius a und dem Neigungswinkel φ des Fahrstrahls OP gegen die Abszissenachse sind

$$x = a\cos\varphi, \quad y = a\sin\varphi \quad \ldots \quad (1).$$

Mit dem Wachstum des Winkels um $d\varphi$ nimmt die Bogenlänge um $ds = a\,d\varphi$ und die Ordinate um $dy = ds\cos\varphi$ zu, während die Abszisse um $dx = -ds\sin\varphi$ abnimmt. Wir haben also nach Elimination von ds für die Differentiale dx und dy

$$dx = -a\sin\varphi\,d\varphi,$$
$$dy = a\cos\varphi\,d\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1\,a)$$

oder wegen (1) unter Wegfall der Konstanten a

$$\frac{d(\cos\varphi)}{d\varphi} = -\sin\varphi,$$
$$\frac{d(\sin\varphi)}{d\varphi} = \cos\varphi \quad . \quad . \quad (1\,b)$$

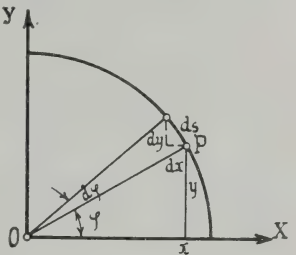

Fig. 66.

sowie umgekehrt durch Integration

$$\int\cos\varphi\,d\varphi = \sin\varphi + C,$$
$$\int\sin\varphi\,d\varphi = -\cos\varphi + C \quad (1\,c).$$

Weiterhin folgt aus

$$u = \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}, \quad v = \operatorname{cotg}\varphi = \frac{x}{y} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

nach der Divisionsregel des § 8

$$du = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}, \quad dv = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} \quad . \quad . \quad (2\,a)$$

und mit (1) und (1 a)

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{1}{\cos^2\varphi}, \quad \frac{dv}{d\varphi} = -\frac{1}{\sin^2\varphi}$$

also

$$\frac{d(\operatorname{tg}\varphi)}{d\varphi} = \frac{1}{\cos^2\varphi}, \quad \frac{d(\operatorname{cotg}\varphi)}{d\varphi} = -\frac{1}{\sin^2\varphi} \quad . \quad . \quad (2\,b).$$

Daraus folgt umgekehrt durch Integration

$$\int\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \operatorname{tg}\varphi + C, \quad \int\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} = -\operatorname{cotg}\varphi + C \quad . \quad (2\,c).$$

Dagegen erhalten wir nach der Gl. (8 b) des § 11

$$\left.\begin{aligned}\int\operatorname{tg}\varphi\,d\varphi &= \int\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}d\varphi = -\int\frac{d(\cos\varphi)}{\cos\varphi} = -\lg\cos\varphi + C\\ \int\operatorname{cotg}\,d\varphi &= \int\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}d\varphi = \int\frac{d(\sin\varphi)}{\sin\varphi} = \lg\sin\varphi + C\end{aligned}\right\} \quad (3).$$

1. Beispiel. Aus $x = f(\varphi) = a\cos\varphi$ folgt zunächst $f(0) = a$ und durch sukzessive Differentiation mit $dx = x'\,d\varphi$

$$x' = f'(\varphi) = -a\sin\varphi, \quad f'(0) = 0$$
$$x'' = f''(\varphi) = -a\cos\varphi, \quad f''(0) = -a$$
$$x''' = f'''(\varphi) = +a\sin\varphi, \quad f'''(0) = 0$$
$$x^{IV} = f^{IV}(\varphi) = +a\cos\varphi, \quad f^{IV}(0) = +a \text{ usw.}$$

Dies liefert in Gl. (4a) des § 10 eingesetzt die Potenzreihe

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \ldots \quad (4),$$

während sich ganz analog

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \ldots \quad (5)$$

ergibt. Dividieren wir die zweite dieser Reihen mit φ, so folgt

$$\frac{\sin\varphi}{\varphi} = 1 - \frac{\varphi^2}{3!} + \frac{\varphi^4}{5!} - \ldots$$

und für die Grenze $\varphi = 0$

$$\lim_{\varphi = 0}\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right) = 1 \quad (5a).$$

Ebenso wird natürlich

$$\lim_{\varphi = 0}\left(\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\varphi}\right) = \lim\frac{\sin\varphi}{\varphi\cos\varphi} = \lim\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)\cdot\frac{1}{\cos\varphi} = 1 \quad (5b),$$

d. h. für sehr kleine Werte des Argumentes φ kann man den Sinus und Tangens mit dem Bogen selbst vertauschen.

2. Beispiel. Eine weitere Annäherung ergibt sich durch Vernachlässigung der vierten und höheren Potenzen von φ zu

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}, \quad \sin\varphi = \varphi\left(1 - \frac{\varphi^2}{6}\right),$$

woraus mit

$$2 + \cos\varphi = 3 - \frac{\varphi^2}{2} = 3\left(1 - \frac{\varphi^2}{6}\right)$$

durch Division die Formel

$$\frac{\varphi}{\sin\varphi} = \frac{3}{2 + \cos\varphi} \quad (6)$$

hervorgeht. Diese benutzte Huygens zur näherungsweisen Abwickelung des Kreisbogens $AP = a\varphi$ (Fig. 67) auf der Tangente in A, indem er von dem Punkte D, dessen Abstand $AD = 3\,OA = 3a$ ist, durch P eine Gerade zog, welche die Tangente in dem gesuchten Punkte B trifft. Denn es ist

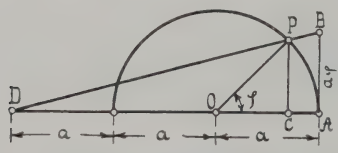

Fig. 67.

$$\frac{\varphi}{\sin\varphi} = \frac{AB}{PC} = \frac{AD}{CD} = \frac{3a}{2a + a\cos\varphi} = \frac{3}{2 + \cos\varphi}.$$

3. Beispiel. Multiplizieren wir die Gl. (5) mit $i = \sqrt{-1}$ und beachten, daß

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = +1, \quad i^5 = +i, \quad i^6 = -1 \text{ usw.},$$

so wird daraus

$$i \sin \varphi = i\varphi + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} + \cdots,$$

während wir für (4) auch schreiben dürfen

$$\cos \varphi = 1 + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^6}{6!} + \cdots$$

Durch Addition beider Reihen erhalten wir dann

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = 1 + \frac{i\varphi}{1!} + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \cdots$$

oder mit Rücksicht auf die Bedeutung dieser Reihe nach Gl. (5) § 11

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

und ebenso nach Ersatz von φ durch $-\varphi$

$$\cos \varphi - i \sin \varphi = e^{-i\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7\,a).$$

Schreiben wir in diesen Gleichungen $n\varphi$ für φ, so wird daraus

$$\left.\begin{aligned} \cos n\varphi + i \sin n\varphi &= e^{in\varphi} = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n \\ \cos n\varphi - i \sin n\varphi &= e^{-in\varphi} = (\cos \varphi - i \sin \varphi)^n \end{aligned}\right\} \ldots \quad (8),$$

zwei Gleichungen, welche den Moivreschen Lehrsatz ausdrücken.

Ebenso folgt durch Addition und Subtraktion der Formeln (7) und (7a) mit Rücksicht auf die Gl. (11b) des § 11

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \mathfrak{Cos}\, i\varphi, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = -i\, \mathfrak{Sin}\, i\varphi \quad (9)$$

oder umgekehrt

$$\mathfrak{Cos}\, \varphi = \cos i\varphi, \quad \mathfrak{Sin}\, \varphi = -i \sin i\varphi \quad \ldots\ldots \quad (9\,a)$$

und dementsprechend

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Tg}\, \varphi &= -i \operatorname{tg} i\varphi, \quad \operatorname{tg} \varphi = -i\, \mathfrak{Tg}\, i\varphi \\ \mathfrak{Cotg}\, \varphi &= i \operatorname{cotg} i\varphi, \quad \operatorname{cotg} \varphi = i\, \mathfrak{Cotg}\, i\varphi \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (9\,b).$$

4. Beispiel. Vergleicht man die obigen Reihen (4) und (5) mit den Reihen der Gl. (9d) des § 10, welche die Lösung von $y'' = -\alpha^2 y$ darstellt, so erkennt man ihre Identität mit $\cos \alpha x$ und $\sin \alpha x$, so daß man für diese Ergebnisse auch schreiben darf

$$y = y_0 \cos \alpha x + \frac{\sqrt{C - \alpha^2 y_0^2}}{\alpha} \sin \alpha x$$

oder allgemein mit den willkürlichen Konstanten A und B an Stelle von y_0 und $\frac{1}{\alpha}\sqrt{C - \alpha^2 y_0^2}$

$$y = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10).$$

Von der Richtigkeit dieser Lösung kann man sich auch durch zweimalige Differentiation überzeugen, welche

$$y'' = -\alpha^2(A\cos\alpha x + B\sin\alpha x) = -\alpha^2 y \quad . \quad . \quad (10\,a)$$

liefert, wobei die Konstanten A und B wieder herausfallen.

Die ebenfalls hierfür gültige Lösung (6a) § 11, nämlich

$$y = A' e^{\alpha i x} + B' e^{-\alpha i x}$$

läßt sich leicht mit Hilfe der obigen Formeln (7) und (7a) in (10) umformen, was dem Leser überlassen bleiben möge.

Die Normalen in zwei um das Bogenelement ds voneinander entfernten Kurvenpunkten P und P' schneiden sich in einem Punkte M (Fig. 68), der als Mittelpunkt eines Kreises durch PP' angesehen werden kann und mit der Kurve das Bogenelement ds sowie die beiden Tangenten in P' und P gemein hat. Da die Kurve um so stärker gekrümmt ist, je kleiner dieser Kreis ausfällt, so bezeichnen wir ihn als den Krümmungskreis der Kurve im Punkte P und wählen für seinen Halbmesser, den sog. Krümmungsradius, den Buchstaben ϱ. Ist ferner τ der Tangentenwinkel in P, so gilt nach der Definition des Differentialquotienten

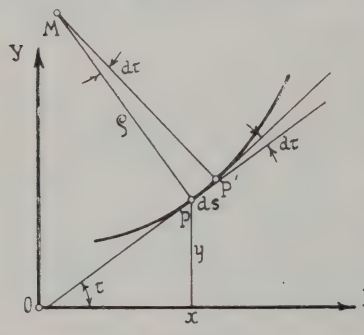

Fig. 68.

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{dy}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11),$$

woraus durch abermalige Differentiation mit Rücksicht auf Gl. (2b)

$$\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = \frac{d^2y}{dx^2}\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11\,a)$$

folgt. Der Zuwachs $d\tau$ des Tangentenwinkels ist aber auch identisch mit dem Winkel zwischen den beiden Normalen in P und P', so daß wir für das Bogenelement ds auf dem Krümmungskreis auch haben

$$ds = \varrho\,d\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11\,b)$$

und nach Elimination von $d\tau$ aus (11a) und (11b)

$$\frac{ds}{\varrho\cos^2\tau} = \frac{d^2y}{dx^2}\,dx.$$

Nun ist aber auch

$$\cos\tau = \frac{dx}{ds},\quad ds^2 = dx^2 + dy^2 = \left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]dx^2,$$

mithin folgt für den Krümmungsradius

$$\varrho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \quad . \; . \; . \quad (12),$$

während der reziproke Wert als das Krümmungsmaß der Kurve oder kurz als ihre Krümmung bezeichnet wird.

5. Beispiel. Hiernach erhält man für die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

mit der Substitution

$$x = a\cos\varphi,\quad y = b\sin\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13a)$$

zunächst

$$\frac{dx}{d\varphi} = -a\sin\varphi,\quad \frac{dy}{d\varphi} = b\cos\varphi,\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\operatorname{cotg}\varphi \quad . \quad (13b),$$

also

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{b}{a\sin^2\varphi}\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{b}{a^2\sin^3\varphi} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (13c)$$

und daher

$$\varrho = -\left(1+\frac{b^2}{a^2}\operatorname{cotg}^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{a^2\sin^3\varphi}{b} = -\frac{(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{ab} \quad (14)$$

oder wegen (13a)

$$\varrho = -\frac{[a^4y^2+b^4x^2]^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14a).$$

Darum folgt für die beiden Scheitel mit $x=0$, $y=b$ bzw. $x=a$, $y=0$

$$\varrho_1 = -\frac{a^2}{b},\quad \varrho_2 = -\frac{b^2}{a}.$$

Man übersieht leicht, daß der Krümmungsradius der Hyperbel sich hiervon nur durch das Vorzeichen des mit y^2 behafteten Gliedes unterscheiden wird, was der Leser mit Hilfe der Substitution

$$2x = a(e^u+e^{-u}),\quad 2y = b(e^u-e^{-u})$$

analog Gl. (11) § 11 nachweisen kann.

Für die Parabel $y^2 = 2px$ erhält man ohne Substitution

$$y\frac{dy}{dx} = p, \quad y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{y^3}$$

$$\varrho = -\frac{(p^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15).$$

Da die zyklometrischen Funktionen

$$\varphi = \arcsin\xi = \arccos\eta \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

die Umkehrung der Kreisfunktionen

$$\xi = \sin\varphi, \quad \eta = \cos\varphi$$

darstellen, so ist

$$d\xi = \cos\varphi\, d\varphi, \quad d\eta = -\sin\varphi\, d\varphi$$

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{1}{\cos\varphi}, \quad \frac{d\varphi}{d\eta} = -\frac{1}{\sin\varphi}$$

oder wegen

$$\cos\varphi = \sqrt{1 - \sin^2\varphi} = \sqrt{1 - \xi^2}, \quad \sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \sqrt{1 - \eta^2}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\xi} &= \frac{d(\arcsin\xi)}{d\xi} = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \\ \frac{d\varphi}{d\eta} &= \frac{d(\arccos\eta)}{d\eta} = -\frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (16a).$$

Daraus folgt durch Integration

$$\int\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \arcsin\xi + C_1 = -\arccos\xi + C_2 \quad . \quad (16b).$$

Ebenso ergibt sich aus

$$\varphi = \operatorname{arctg}\xi = \operatorname{arccotg}\eta \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

$$\xi = \operatorname{tg}\varphi, \quad \eta = \operatorname{cotg}\varphi$$

$$d\xi = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}, \quad d\eta = -\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi}$$

und wegen

$$\frac{1}{\cos^2\varphi} = 1 + \operatorname{tg}^2\varphi = 1 + \xi^2, \quad \frac{1}{\sin^2\varphi} = 1 + \operatorname{cotg}^2\varphi = 1 + \eta^2$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\xi} &= \frac{d(\operatorname{arctg}\xi)}{d\xi} = \frac{1}{1+\xi^2} \\ \frac{d\varphi}{d\eta} &= \frac{d(\operatorname{arccotg}\eta)}{d\eta} = -\frac{1}{1+\eta^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (17a)$$

und umgekehrt

$$\int \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \operatorname{arctg}\xi + C_1 = -\operatorname{arccotg}\xi + C_2 \quad . \quad (17\,b)$$

Weiterhin folgt durch Substitution neuer Veränderlicher und teilweise Integration

$$\int \arcsin\xi\, d\xi = \int \varphi\cos\varphi\, d\varphi = \int \varphi\, d(\sin\varphi) = \varphi\sin\varphi - \int \sin\varphi\, d\varphi$$

$$= \varphi\sin\varphi + \cos\varphi + C = \xi\arcsin\xi + \sqrt{1-\xi^2} + C \quad . \quad (18)$$

$$\int \operatorname{arctg}\xi\, d\xi = \int \frac{\varphi\, d\varphi}{\cos^2\varphi} = \int \varphi\, d(\operatorname{tg}\varphi) = \varphi\operatorname{tg}\varphi - \int \operatorname{tg}\varphi\, d\varphi$$

$$= \varphi\operatorname{tg}\varphi + \lg\cos\varphi + C = \xi\operatorname{arctg}\xi + \lg\sqrt{1+\xi^2} + C \quad (19).$$

6. Beispiel. Zur Gewinnung einer Potenzreihe für arc sin ξ entwickeln wir deren Ableitung (16a) nach dem binomischen Lehrsatze Gl. (6) § 10 in die Reihe

$$\frac{d\,(\text{arc sin}\,\xi)}{d\xi} = (1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\xi^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\xi^6 + \ldots$$

und integrieren gliedweise nach den Regeln des § 9, wodurch bis auf eine Konstante

$$\arcsin\,\xi = C + \xi + \frac{1}{2}\cdot\frac{\xi^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\xi^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{\xi^7}{7} + \ldots$$

wird. Da nun für $\xi = 0$, auch arc sin $\xi = 0$ ist, so verschwindet die Konstante C und es bleibt

$$\text{arc sin}\,\xi = \xi + \frac{1}{2}\frac{\xi^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\xi^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{\xi^7}{7} + \quad . \quad . \quad (20).$$

Für $\xi = 1$ ist arc sin $1 = \frac{\pi}{2}$, wodurch man die Reihe

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \ldots \quad . \quad . \quad (20\,a)$$

erhält, deren Glieder indessen nicht rasch genug abnehmen für eine bequeme Berechnung von π.

7. Beispiel. In derselben Weise folgt aus

$$\frac{d\,(\operatorname{arctg}\,\xi)}{d\,\xi} = (1+\xi^2)^{-1} = 1 - \xi^2 + \xi^4 - \xi^6 + \ldots$$

durch Integration unter Wegfall der Konstanten (d. h. wegen arctg $0 = 0$)

$$\operatorname{arctg}\,\xi = \xi - \frac{\xi^3}{3} + \frac{\xi^5}{5} - \frac{\xi^7}{7} + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21),$$

woraus für $\xi = 1$, artg $1 = \frac{\pi}{4}$, also

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \ldots \ldots \quad (21\,a)$$

hervorgeht. Faßt man hierin die aufeinander folgenden Differenzen je zweier Glieder zusammen, so ergibt sich mit

$$\frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \ldots\right) \quad \ldots \quad (21\,b)$$

eine neue für die Berechnung von π schon recht bequeme Reihe.

8. Beispiel. Die Fläche der Ellipse Gl. (13) ist mit der Substitution (13a) bis auf eine Konstante

$$F = \int y\,dx = -ab\int \sin^2\varphi\,d\varphi = -\frac{ab}{2}\int (1 - \cos 2\varphi)\,d\varphi$$

$$= -\frac{ab}{2}\left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right) = \frac{ab}{2}(\cos\varphi \sin\varphi - \varphi).$$

Da nun $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$ war, so folgt durch Einsetzen

$$F = \frac{xy}{2} - \frac{ab}{2}\arccos\frac{x}{a} + C = \frac{xy}{2} - \frac{ab}{2}\arcsin\frac{y}{b} + C\,. \quad (22)$$

Für die untere Grenze $x = -a$, $y = 0$ verschwindet mit $\arccos 1 = \arcsin 0 = 0$ die Konstante C; und man übersieht, daß der in Fig. 69 schraffierte Sektor OAP mit $\frac{ab}{2}\arccos\frac{x}{a} = \frac{ab}{2}\arcsin\frac{y}{b}$ identisch ist, während F die Differenz dieses Sektors und des Dreiecks $\frac{xy}{2}$ darstellt. Das Vorzeichen von F erscheint hierbei negativ wegen des Umfahrungssinnes APO (vgl. § 4). Daher liefert auch (22) für den Ellipsenquadranten, d. h. die Fläche zwischen $x = -a$, $y = 0$ und $x = 0$, $y = b$ mit $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$ den Wert

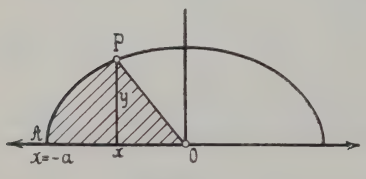

Fig. 69.

$$F_0 = -ab\,\frac{\pi}{4}$$

oder für die ganze Ellipsenfläche mit Weglassung des Vorzeichens

$$4F_0 = \pi ab.$$

Setzen wir dann noch in den Ausdruck (22) $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ ein, so folgt auch nach Wegheben von b allgemein

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{a^2}{2}\arccos\frac{x}{a} + C \quad \ldots \quad (22).$$

Da das Bogenelement ds einer Kurve die Hypothenuse eines unendlich kleinen Dreiecks mit den Katheten dx und dy bildet, so ist

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

und daher die Bogenlänge der Kurve selbst bis auf eine Konstante

$$s = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23).$$

Die Ausführung dieser Integration wird häufig durch Einführung einer Hilfsveränderlichen u erleichtert, wenn

$$x = f_1(u), \quad y = f_2(u) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

gesetzt werden kann; dann ist

$$dx = f_1'(u)\, du, \quad dy = f'_2(u)\, du$$

also

$$s = \int \sqrt{f_1'(u)^2 + f_2'(u)^2}\, du \quad . \quad . \quad . \quad (24\text{a}).$$

9. Beispiel. Für die gemeine Zykloide gelten nach § 4 Gl. (11) die Formeln

$$x = a(\varphi - \sin\varphi), \quad y = a(1 - \cos\varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25),$$

also

$$dx = a(1 - \cos\varphi)\, d\varphi, \quad dy = a \sin\varphi\, d\varphi,$$

worin φ den abgerollten Kreisbogen und a den Radius des Rollkreises bedeutet (Fig. 20). Dann ist

$$ds^2 = a^2[(1 - \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi]\, d\varphi^2 = 2a^2(1 - \cos\varphi)\, d\varphi^2$$

und da

$$1 - \cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

ist,

$$s = 2a\int_0^{\varphi} \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 4a\left(1 - \cos\frac{\varphi}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25\text{a}).$$

Daraus folgt für die ganze Schleife mit $\varphi = 2\pi$, $\cos\frac{\varphi}{2} = -1$, $s = 8a$.

10. Beispiel. Für flache Bogen ist der Neigungswinkel gegen die Sehne zwischen den Endpunkten klein und damit auch der mit der Tangente dieses Winkels identische Differentialquotient, so daß man an Stelle von (23) nach Gl. (7c) § 10 auch angenähert schreiben darf

$$s = \int \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26).$$

So erhält man für einen flachen Parabelbogen von der halben Sehnenlänge l mit dem Scheitelabstand $OA = h$ (Fig. 70)

$$x^2 = 2py, \quad l^2 = 2ph,$$

also

$$y = \frac{h}{l^2} x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2h}{l^2} x$$

und daher für den Bogen BOB hinreichend genau

$$s = 2\int_0^l \left(1 + \frac{2h^2}{l^4} x^2\right) dx = 2l\left(1 + \frac{2}{3}\frac{h^2}{l^2}\right) \quad . \quad . \quad (26\,\text{a}).$$

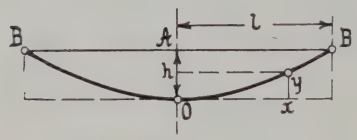

Fig. 70.

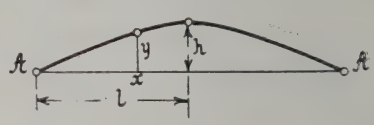

Fig. 71.

11. Beispiel. Für eine halbe Sinuslinie (Fig. 71) mit der Scheitelhöhe h über der Mittelinie $2l$ haben wir

$$y = h \sin \alpha x, \quad \alpha l = \frac{\pi}{2}$$

oder

$$y = h \sin \frac{\pi x}{2l}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pi h}{2l} \cos \frac{\pi x}{2l}.$$

Ist nun h klein gegen l, die Sinuslinie also sehr flach, so liefert diese Formel mit (26) für den ganzen Bogen

$$s = 2\int_0^l \left(1 + \frac{\pi^2 h^2}{8l^2} \cos^2 \frac{\pi x}{2l}\right) dx = 2l + \frac{\pi^2 h^2}{4l^2} \int_0^l \cos^2 \frac{\pi x}{2l}\, dx.$$

Da nun anderseits

$$\cos^2 \frac{\pi x}{2l} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi x}{l}$$

$$\int_0^l \cos^2 \frac{\pi x}{2l}\, dx = \frac{l}{2} + \frac{1}{2} \int_0^l \cos \frac{\pi x}{l}\, dx = \frac{l}{2}$$

ist, so folgt schließlich für die Bogenlänge AA nahezu

$$s = 2l\left(1 + \frac{\pi^2}{16}\frac{h^2}{l^2}\right) \sim 2l\left(1 + \frac{10}{16}\frac{h^2}{l^2}\right). \quad . \quad . \quad (26\text{b}).$$

Dieses Ergebnis stimmt aber ziemlich genau mit (26a) überein, so daß man die flache Sinuslinie auch angenähert als Parabelbogen auffassen kann.

§ 13. Ausgezeichnete Funktionswerte.

Erreicht in einer stetig verlaufenden Kurve (Fig. 72) mit der Gleichung

$$y = f(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

die Ordinate y im Punkte P_1 ein Maximum y_1, in P_2 ein Minimum y_2, so wird in beiden Punkten die Tangente der Abszissenachse parallel und damit der Tangentenwinkel τ verschwinden. Dies trifft dann auch für den Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \operatorname{tg}\tau = 0 \quad . \quad (2)$$

zu, dessen Verschwinden für bestimmte Abszissenwerte somit die Bedingung eines zugehörigen Maximums oder Minimums ist. Umgekehrt erhält man aus der Gleichung $f'(x) = 0$ durch Auflösen nach x die einem Maximum oder Minimum der Ordinate zugehörigen Abszissen und durch deren Einsetzen in (1) die Maximal- oder Minimalwerte von y selbst. Ob es sich dabei um ein Maximum oder Minimum handelt, zeigt ohne weiteres ein Blick auf die Kurve; indessen läßt sich diese Frage auch analytisch aus der Veränderung des Differentialquotienten in der Nähe der Punkte P_1 und P_2 entscheiden. Nähert man sich von P ausgehend dem Punkte P_1, so nimmt offenbar der Tangentenwinkel τ ab, während er auf dem Wege von P bis P_2 und darüber hinaus zunimmt. Dem Zuwachse des Tangentenwinkels entspricht aber ein solcher der Ableitung $f'(x) = \operatorname{tg}\tau$; und dieser wiederum ist durch die zweite Ableitung

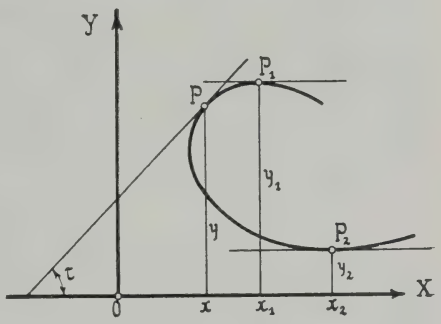

Fig. 72.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \frac{d\operatorname{tg}\tau}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

gegeben, deren negatives, der Abnahme entsprechendes Vorzeichen für die durch Gl. (2) definierten Werte von x ein diesem zugehöriges Maximum von y bestimmt, während mit der Zunahme von $f'(x)$ ein

positives Vorzeichen von $f''(x)$ ein Minimum kennzeichnet. Verschwindet aber auch der zweite Differentialquotient, so wird trotz horizontaler Tangente im allgemeinen die Ordinate des betreffenden Kurvenpunktes P_1 keinen Maximal- oder Minimalwert besitzen (Fig. 73). Dagegen wird dort nach Gl. (12) § 12 mit $f''(x) = 0$ der Krümmungsradius ϱ unendlich groß werden und beim Durchgang durch P_1 sein Vorzeichen wechseln, weshalb man diesen Punkt als Wendepunkt bezeichnet. Solche Wendepunkte sind natürlich nicht an horizontale Tangenten gebunden, sondern können, wie z. B. P_2 in Fig. 73, beliebig geneigte Tangenten besitzen.

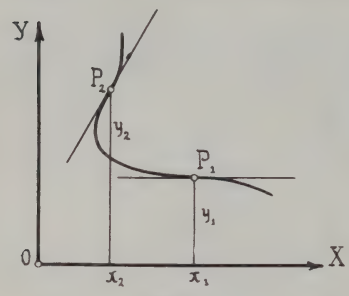

Fig. 73.

1. Beispiel. Die Ableitung der Funktion $y = \sin \alpha x$ (Fig. 74), nämlich $y' = \alpha \cos \alpha x$ verschwindet

$$\text{für } \alpha x = \frac{1}{2}\pi, \quad \frac{3}{2}\pi, \quad \frac{5}{2}\pi, \quad \frac{7}{2}\pi \text{ usw.,}$$

wobei $y'' = -\alpha^2 \sin \alpha x$, $= -\alpha^2 < 0$, $+\alpha^2 > 0$, $-\alpha^2 < 0$, $+\alpha^2 > 0$ »
entsprechend einem Max. Min. Max. Min.

Die zweite Ableitung verschwindet für die Punkte $\alpha x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$ usw., denen allen die Ordinate $y = 0$ zukommt, so daß also die Sinuslinie Fig. 74 die Abszissenachse mit Wendepunkten schneidet.

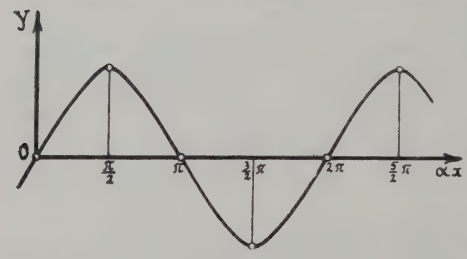

Fig. 74.

In derselben Weise möge der Leser die Funktion $y = \operatorname{tg} \alpha x$, deren Verlauf in Fig. 17 dargestellt ist, untersuchen.

2. Beispiel. Aus $y = e^{-x^2}$ folgt $y' = -2e^{-x^2}x$, $y'' = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$, so daß $y' = 0$ für $x = 0$ und $x_{12} = \pm \infty$ wird. Da nun für $x_0 = 0, y'' = -2$ ist, so wird $y_0 = e^0 = 1$ ein Maximum und $y_{12} = e^{-\infty} = 0$ ein Minimum. Weiter ist $y'' = 0$ für $x_{12} = \pm \infty$ und $x_{34} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, so daß die in Fig. 75 dargestellte Kurve zwei Wendepunkte mit der Ordinate $y = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ im Endlichen besitzt, während

die beiden anderen Wendepunkte auf der Abszissenachse, der sich die Kurve asymptotisch nähert, im Unendlichen liegen und gleichzeitig den Minimalwert der Ordinate liefern.

3. Beispiel. Um eine Kurve zu finden, welche im Koordinatenanfang, d. h. für $x = 0$, $y = 0$ in die Abszissenachse und im Punkte $x_1 y_1$ in eine Gerade von der Neigung τ_1 mit je einem Wendepunkte übergeht (Fig. 76), setzen wir für die Kurvengleichung die Potenzreihe

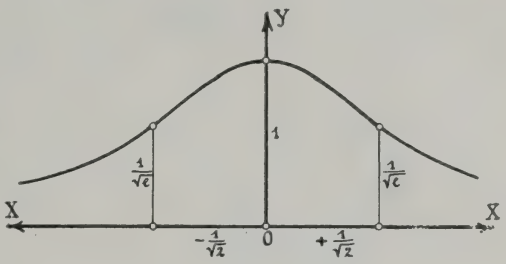

Fig. 75.

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + A_5 x^5 + \ldots$$

an, deren Koeffizienten wir durch die genannten Bedingungen zu ermitteln haben. Da die Kurve durch den Anfang O gehen soll, also $y = 0$ für $x = 0$ ist, so verschwindet zunächst die Konstante $A_0 = 0$, und wir erhalten durch Differentiation

$$y' = f'(x) = A_1 + 2 A_2 x + 3 A_3 x^2 + 4 A_4 x^3 + 5 A_5 x^4 + .$$

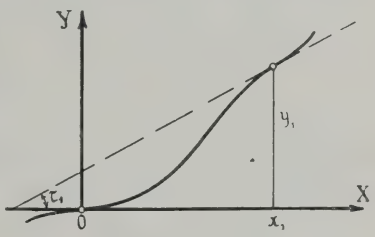

Fig. 76.

Auch dieser Ausdruck soll wegen der Berührung der Abszissenachse für $x = 0$ verschwinden, d. h. es muß $A_1 = 0$ sein. Schließlich ist

$$y'' = f''(x) = 2 A_2 + 2 \cdot 3 A_3 x + 3 \cdot 4 A_4 x^2 + 4 \cdot 5 A_5 x^3 + \ldots,$$

worin wegen des Wendepunktes in O, d. h. wegen $f''(0) = 0$, $A_2 = 0$ ist, so daß nur mehr die drei dem Punkte $x_1 y_1$ mit der Tangentenbedingung $f'(x_1) = \operatorname{tg} \tau_1$ und der Wendepunktsbedingung $f''(x_1) = 0$ genügenden Formeln

$$\begin{aligned} y_1 &= A_3 x_1^3 + A_4 x_1^4 + A_5 x_1^5 + \ldots \\ \operatorname{tg} \tau_1 &= 3 A_3 x_1^2 + 4 A_4 x_1^3 + 5 A_5 x_1^4 + \ldots \\ 0 &= 2 \cdot 3 A_3 x_1 + 3 \cdot 4 \cdot A_4 x_1^2 + 4 \cdot 5 \cdot A_5 x_1^3 + \ldots \end{aligned}$$

übrig bleiben, welche zur Bestimmung der drei Konstanten A_3, A_4, A_5 unter Wegfall aller übrigen gerade ausreichen. Die Ausführung dieser Rechnung kann dem Leser mit der Bemerkung überlassen bleiben, daß die auf diese Weise erhaltene Kurve mit der Gleichung

$$y = A_3 x^3 + A_4 x^4 + A_5 x^5$$

zur Überführung zweier geradliniger Schienenstränge ineinander praktische Verwendung findet.

4. Beispiel. Der gebrochene Weg $P_1 P P_2$ zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 ($x_1 y_1$ und $x_2 y_2$) über einen Punkt P ($x\,0$) der Abszissenachse (Fig. 77) hat die Länge

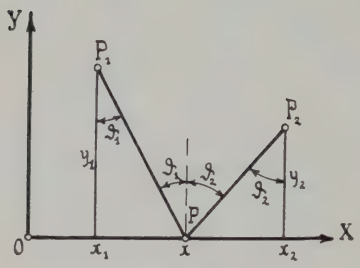

Fig. 77.

$$s = \sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2} + \sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}$$

und wird zu einem Minimum für

$$\frac{ds}{dx} = \frac{x - x_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2}} - \frac{x_2 - x}{\sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}} = 0$$

oder für

$$\sin \vartheta_1 = \sin \vartheta_2,$$

d. h. wenn die Normale zur Abszissenachse in P den Winkel $P_1 P P_2$ halbiert, entsprechend der Reflexion eines Lichtstrahles am Spiegel OX.

Ist eine Funktion in der Form

$$y = \frac{f(x)}{F(x)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

gegeben, so kann es vorkommen, daß für einen Wert x_1 der Veränderlichen x Zähler und Nenner zugleich verschwinden oder unendlich groß werden, woraus ein scheinbar unbestimmter Wert für y_1 resultiert. Fassen wir zunächst den Fall ins Auge, daß gleichzeitig

$$f(x_1) = 0, \quad F(x_1) = 0$$

wird, so dürfen wir diese Werte ohne weiteres dem Zähler bzw. dem Nenner von (4) hinzufügen und schreiben

$$y = \frac{f(x) - f(x_1)}{F(x) - F(x_1)} = \frac{\dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}}{\dfrac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1}}$$

und erhalten daraus für $x = x_1$, d. h. durch den Grenzübergang

$$y_1 = \frac{f'(x_1)}{F'(x_1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4\,a)$$

Ist dagegen

$$y_1 = \frac{f(x_1)}{F(x_1)} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\dfrac{1}{F(x_1)}}{\dfrac{1}{f(x_1)}} = \frac{0}{0},$$

so schreiben wir an Stelle von (4)

$$y_1 = \lim_{x = x_1} \left[\frac{\dfrac{1}{F(x)} - \dfrac{1}{F(x_1)}}{\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{f(x_1)}} \right] = \frac{\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{F(x_1)}\right)}{\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{f(x_1)}\right)} \quad . \quad (4\,\mathrm{b})$$

und wenn

$$y_1 = f(x_1) \cdot F(x_1) = 0 \cdot \infty = \frac{f(x_1)}{\dfrac{1}{F(x_1)}} = \frac{0}{0}$$

wird, so folgt

$$y_1 = \frac{f'(x_1)}{\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{F(x_1)}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4\,\mathrm{c}).$$

In derselben Weise lassen sich alle scheinbar unbestimmten Formen behandeln, event. unter Wiederholung des ganzen Verfahrens, wenn die erste Ableitung in Zähler und Nenner für x_1 wieder einen unbestimmten Ausdruck liefern würde.

5. Beispiel. So liefert $y = \dfrac{\sin x}{x}$ für $x = 0$, $y_1 = \dfrac{\sin 0}{0}$, während man durch Differentiation oben und unten

$$y_1 = \cos 0 = 1$$

als Grenzwert erhält, vgl. (5 a) in § 12.

Ebenso wird für $x = 0$

$$y_1 = \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)_0 = \frac{0}{0} = \frac{1}{\cos^2 0} = 1$$

im Einklang mit Gl. (5 b) § 12.

6. Beispiel: Weiter ist für $x = 0$

$$y_1 = \left(\frac{e^x - 1}{x}\right)_0 = \frac{0}{0} = e^0 = 1$$

$$y_1 = (x \cdot e^{-x})_\infty = \infty \cdot 0 = \left(\frac{x}{e^x}\right)_\infty = \frac{1}{e^\infty} = 0.$$

Um $y_1 = (x^x)_0 = 0^0$ zu berechnen, logarithmiere man beidseitig, schreibe also

$$\lg y_1 = (x \lg x)_0 = \left(\frac{\lg x}{\dfrac{1}{x}}\right)_0 = -\left(\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x^2}}\right)_0 = -(x)_0 = 0,$$

woraus

$$y_1 = (x^x)_0 = 1$$

folgt.

7. Beispiel. Die in Fig. 64 schraffierte Fläche der Kurve $y x^\mu = y_1 x_1^\mu$ (6. Beispiel § 9) hatte zwischen zwei Parallelen zur Abszissenachse den Inhalt

$$F = \frac{\mu x_1 y_1}{\mu - 1}\left[1 - \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{\frac{\mu-1}{\mu}}\right] = \frac{x_1 y_1}{u}\left[1 - \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^u\right],$$

wenn wir $\frac{\mu - 1}{\mu} = u$ setzen. Geht die Kurve mit $\mu = 1$ oder $u = 0$ in $xy = x_1 y_1$ über, so wird der Ausdruck unbestimmt 0 : 0, während man nach dem obigen Verfahren durch Differentiation nach u findet

$$F_0 = -\left[x_1 y_1 \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^u \lg n \frac{y_2}{y_1}\right]_0 = x_1 y_1 \lg n \frac{y_1}{y_2},$$

ein Ergebnis, welches man natürlich auch unmittelbar ableiten könnte, vgl. Gl. (16) § 11.

§ 14. Die Ermittlung des Volumens und der Oberfläche einfacher Körper.

Das Volumen eines geraden Zylinders oder Prismas mit der beliebig gestalteten Grundfläche F und der Höhe h ist $V = F \cdot h$. Schneiden wir daher aus einem Körper (Fig. 78) durch zwei um das Differential dh von einander abstehende Ebenen eine Scheibe heraus, mit der Fläche F, so stellt $F dh$ deren Volumen und zugleich das Volumenelement des ganzen Körpers dar, so daß dessen Volumen zwischen zwei Ebenen in endlichem Abstande $h_2 - h_1$ sich aus

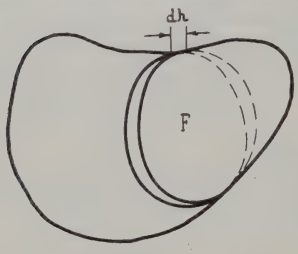

Fig. 78.

$$V = \int_{h_1}^{h_2} F dh \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

berechnet, worin natürlich F als eine Funktion von h durch die Körpergestalt gegeben sein muß, während h_1 und h_2 die Abstände der beiden Grenzebenen von einem willkürlich gewählten Anfangspunkte bedeuten.

1. Beispiel. In einem Kegel (oder einer Pyramide) fällen wir von der Spitze O (Fig. 79) ein Lot $OM_0 = h_0$ auf die Grundfläche F_0, welches eine beliebige Parallelebene F zu dieser in M schneiden möge, derart daß $OM = h$. Legen wir ferner durch dieses Lot zwei um den

Winkel $d\varphi$ geneigte Ebenen, so scheiden diese aus den Ebenen F und F_0 mit $MA = r$ und $M_0A_0 = r_0$ die Flächenelemente

$$MAA' = dF = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$$

$$M_0A_0A'_0 = dF_0 = \frac{1}{2} r_0^2 d\varphi$$

heraus. Da nun wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke $OMA \sim OM_0A_0$

$$\frac{r}{r_0} = \frac{h}{h_0}$$

ist, so folgt auch

$$dF = \frac{1}{2} \frac{h^2}{h_0^2} r_0^2 d\varphi = \frac{h^2}{h_0^2} dF_0$$

oder

$$F = \frac{h^2}{h_0^2} F_0.$$

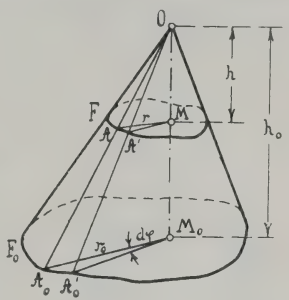

Fig. 79.

Mithin ist das Volumen des Kegels

$$V = \int_0^{h_0} F dh = \frac{F_0}{h_0^2} \int_0^{h_0} h^2 dh = \frac{1}{3} F_0 h_0 \quad (2)$$

und das eines Kegelstumpfes zwischen den beiden Höhen h_0 und h_1

$$V = \int_{h_1}^{h_0} F dh = \frac{F_0}{h_0^2} \int_{h_1}^{h_0} h^2 dh = \frac{1}{3} \frac{F_0}{h_0^2} (h_0^3 - h_1^3) \quad . \quad . \quad . \quad (2a).$$

2. Beispiel. Die zur X-Achse normale ebene Schnittfläche $A'B'C'$ durch den in Fig. 44 dargestellten Ellipsoidoktanten ist mit $A'B' = y_0$ und $A'C' = z_0$

$$F = \frac{\pi}{4} y_0 z_0$$

Anderseits aber ist mit $OA' = x$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1$$

oder

$$y_0 z_0 = bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right),$$

und daher folgt für das Volumen des Oktanten

$$V = \int_0^a F dx = \frac{\pi}{4} bc \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{\pi}{6} abc \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

und für das Volumen des ganzen Ellipsoids $V_0 = 8V = \frac{4}{3} \pi abc$. Da

nun die Kugel als ein Ellipsoid mit drei gleichen Halbachsen a aufzufassen ist, so ist deren Volumen

$$V_0 = \frac{4}{3}\pi a^3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3a).$$

Handelt es sich um einen Rotationskörper (Fig. 80) mit der Achse OO, so schneide man aus diesem einen zylindrischen Ring von der Höhe h mit dem Innenradius r und der unendlich kleinen Wandstärke dr heraus, dessen Volumen $2\pi h r dr$ zugleich das Volumenelement des Körpers darstellt, so daß

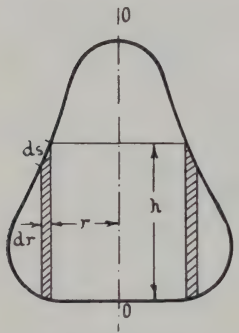

Fig. 80.

$$V = 2\pi \int_0^{r_1} h r \, dr \quad . \; . \; (4),$$

sein Volumen zwischen der Achse und einem Zylinderschnitte vom Radius r_1 ist. In Gl. (4) dürfen wir aber $h\,dr = dF$ auch als das schraffierte Flächenelement des halben Meridianschnitts, durch dessen Rotation der ganze Körper entstanden ist, betrachten und demgemäß allgemeiner schreiben

$$V = 2\pi \int_0^{r_1} r \, dF \quad . \; . \; (4a),$$

worin das Integral wohl auch als das (statische) Moment des Flächenstückes, über welches sich die Integration erstreckt, in bezug auf die Achse OO bezeichnet wird.

Haben wir es insbesondere mit ringförmigen Körpern zu tun, deren halber Meridianschnitt eine Symmetrieachse AA parallel zur Rotationsachse OO mit dem Abstand r_0 besitzt (Fig. 81), so dürfen wir mit $r = r_0 + z$ an Stelle von (4a) für das ganze Ringvolumen auch schreiben

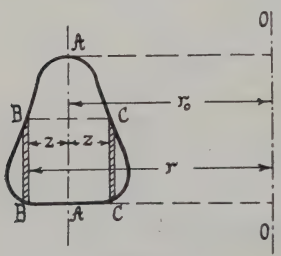

Fig. 81.

$$V = 2\pi r_0 \int dF + 2\pi \int z \, dF \,. \; (5),$$

worin sich die Integrationen über die ganze Fläche des halben Meridianschnittes erstrecken. Infolgedessen entspricht jedem Flächenelemente BB im Abstande $+ z$ von der Symmetrieachse ein kongruentes CC im Abstande $- z$, so daß bei der als Sum-

mierung aufzufassenden Integration über $z dF$ sich je zwei entgegengesetzt gleiche Glieder aufheben und damit das ganze zweite Integral in (3) verschwindet. Das erste Integral dagegen ist identisch mit der Fläche F des halben Meridianschnittes selbst, und damit vereinfacht sich der Ausdruck für das Volumen von Ringkörpern mit einer Symmetrieachse im Abstande r_0 von der Rotationsachse in

$$V = 2\pi r_0 F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5a).$$

3. Beispiel. Das Volumen des durch Rotation einer Parabel $y^2 = 2px$ um ihre Scheiteltangente entstehenden Rotationskörpers Fig. 82) ist nach Gl. (4) mit $h = 2y$ und $r = x$

$$V = 4\pi \int_0^{x_1} yx\,dx = 4\pi \sqrt{2p} \int_0^{x_1} x^{\frac{3}{2}}\,dx$$

$$= \frac{8}{5}\pi \sqrt{2p}\, x_1^{\frac{5}{2}}$$

oder

$$V = \frac{8}{5}\pi x_1^2 y_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

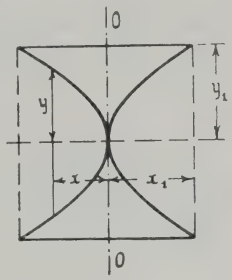

Fig. 82.

4. Beispiel. Das Volumen eines elliptischen Kreisringes mit den Halbachsen a und b des Meridianschnittes, von denen eine der Rotationsachse parallel ist, wird nach Gl. (5a) mit $F = \pi ab$

$$V = 2\pi^2 ab\, r_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

und daraus dasjenigene eines Kreisringes mit dem Kreisquerschnitt $F = \pi a^2$

$$V = 2\pi^2 a^2 r_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7a).$$

Damit bestimmt sich sofort das Volumen eines hohlen Kreisringes mit einem Innenradius a_1 und einem Außenradius a_2 des Ringquerschnittes zu

$$V = 2\pi^2 (a_2^2 - a_1^2) r_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7b).$$

Ist in Fig. 80 ds das Bogenelement der Meridiankurve eines Rotationskörpers im Achsenabstand r, so überstreicht dasselbe bei der vollen Drehung um die Achse OO einen Flächenstreifen $d\Omega = 2\pi r ds$, woraus sich sofort für die ganze Oberfläche des Körpers selbst

$$\Omega = 2\pi \int r ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

ergibt. Hierin kann sich die Integration über einen beliebigen Teil der Meridiankurve zwischen zwei Radien r_1 und r_2 erstrecken, dem dann auch nur ein Teil der ganzen Körperoberfläche entspricht.

Ist die Meridiankurve, wie in Fig. 81, symmetrisch zu einer Achse AA im Abstande r_0 von der Drehachse, so wird die ganze Oberfläche mit $r = r_0 + z$ dieses Ringes

$$\Omega = 2\pi r_0 \int ds + 2\pi \int z\,ds$$

oder, da jedes positive $z\,ds$ durch ein negatives aufgehoben wird, analog (5a), mit dem ganzen Umfang s des halben Meridianschnitts

$$\Omega = 2\pi r_0 s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8a).$$

5. Beispiel. An einem geraden Kreiskegel (Fig. 83) vom halben Öffnungswinkel α ist $OP = s$ die Länge der Mantelgeraden von der Spitze aus bis zu einem beliebigen Punkte P mit dem Achsenabstand r, und daher wird mit

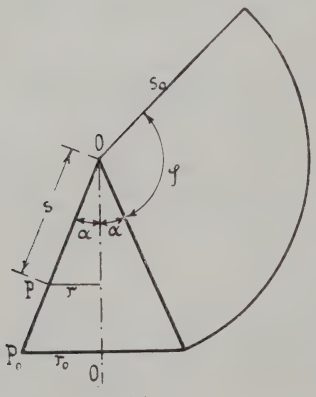

Fig. 83.

$$s = \frac{r}{\sin\alpha}, \quad ds = \frac{dr}{\sin\alpha}$$

aus (8) die Kegeloberfläche

$$\Omega = \frac{2\pi}{\sin\alpha}\int_0^{r_0} r\,dr = \frac{\pi r_0^2}{\sin\alpha} \quad . \quad (9).$$

Da hierin α den Komplementwinkel der Neigung von s gegen r bedeutet, so ist der Grundkreis des Kegels als Projektion der Mantelfläche aufzufassen. Setzen wir die ganze Mantellänge $OP_0 = s_0$, so ist wegen $r_0 = s_0 \sin\alpha$ auch

$$\Omega = \pi s_0^2 \sin\alpha \quad . \quad . \quad . \quad (9a)$$

oder wenn wir den Öffnungswinkel des die Abwicklung bildenden Kreissektors mit φ bezeichnen

$$\Omega = \frac{s_0^2 \varphi}{2},$$

so daß mit (9a)

$$\varphi = 2\pi \sin\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9b)$$

wird.

6. Beispiel. In einem Halbkreise mit dem Radius a (Fig. 84), durch dessen Rotation um die Achse OO eine Kugel entsteht, ist mit dem Neigungswinkel φ des Fahrstrahls gegen die Drehachse

$$r = a \sin \varphi, \quad ds = a\, d\varphi$$

und daher mit (8) die ganze Kugeloberfläche.

$$\Omega = 2\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin \varphi\, d\varphi = 4\pi a^2 \quad . \quad . \quad (10),$$

während z. B. die Fläche einer Kugelhaube mit dem halben Öffnungswinkel φ

$$\Omega = 2\pi a^2 \int_0^{\varphi} \sin \varphi\, d\varphi = 2\pi a^2 (1 - \cos \varphi) \quad (10\,\text{a})$$

wird.

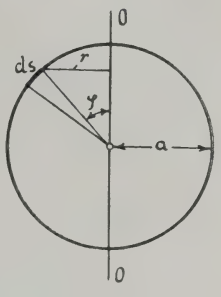

Fig. 84.

7. Beispiel. Die Oberfläche des im 4. Beispiel schon behandelten Kreisringes folgt nach Gl. (8a) mit $s = 2\pi a$ zu

$$\Omega = 4\pi^2 r_0 a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Kapitel III.

Elemente der Mechanik.

§ 15. Geschwindigkeit und Beschleunigung bei geradliniger Bewegung.

Beobachten wir die uns umgebenden Körper, so zeigt sich, daß einzelne von ihnen, z. B. die Gebäude, ihre gegenseitige Lage beibehalten, andere dagegen, wie Fuhrwerke, Tiere und wir selbst, ihre Lage gegenüber den ersteren sowie untereinander verändern. Diese ersteren Körper befinden sich dann nach unserer Ausdrucksweise im Zustande der Ruhe (gegeneinander), die letzteren in demjenigen der Bewegung (gegenüber den ersteren sowie untereinander), wobei wir die in Klammern gesetzten genaueren Bezeichungen gewöhnlich unterdrücken. Zum Vergleich des offenbar sehr verschiedenartigen Ablaufes der beobachteten Bewegungen bedienen wir uns des Begriffes der Zeit, die wir einer Uhr entnehmen und als eine stetig zunehmende Größe ansehen. Wenn wir somit jedem Orte eines bewegten Körpers eine in Sekunden ausgedrückte Zeit zuordnen, so haben wir nur die beobachtete Bewegung mit der Drehung des Uhrzeigers in eine Beziehung gesetzt, ohne uns über das Wesen der letzteren Bewegung weitere Rechenschaft zu geben.

Nunmehr fassen wir eine bestimmte einfache Bewegung, z. B. die einer Lokomotive auf gerader horizontaler Strecke, ins Auge und tragen eine Reihe ihrer aufeinander folgenden Abstände s von einem Ausgangspunkte etwa mit Hilfe einer Karte als Ordinaten in ein Koordinatensystem ein, dessen Abszissen

die zugehörigen Zeiten t sein mögen. Verbinden wir die verschiedenen Endpunkte der Ordinaten miteinander, so erhalten wir eine sog. Wegkurve (Fig. 85) mit der Gleichung

$$s = f(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

welche die Abhängigkeit des vom bewegten Körper zurückgelegten Weges s von der Zeit t angibt. Setzen wir für den Beginn der Wegmessung, d. h. für $s = 0$ auch $t = 0$, so geht die Wegkurve, wie aus Fig. 83 ersichtlich, durch den Koordinatenanfang O; die Abszissen und Ordinaten ihrer rückwärtigen Verlängerung entsprechen dann den bis zum Beginn unserer Messung verflossenen Zeiten und den darin zurückgelegten Strecken.

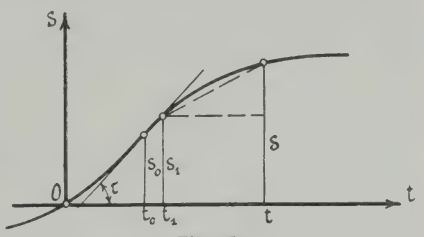

Fig. 85.

Da nun nach unserem Sprachgebrauche ein Bewegungsvorgang sich um so rascher abspielt, je kürzer die beim Durchlaufen einer Strecke $s - s_1$ verflossene Zeit $t - t_1$ ist, so stellt der Quotient

$$\frac{s - s_1}{t - t_1} = v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

ein Maß für die sog. Geschwindigkeit der Bewegung auf dieser Strecke dar. Vermindern wir mit der Zeit auch die durchlaufene Strecke, so nähern wir uns schließlich dem Grenzwerte

$$v = \lim \left(\frac{s - s_1}{t - t_1} \right) = \frac{ds}{dt} = \operatorname{tg} \tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

der Geschwindigkeit im Endpunkte der Strecke s_1 zur Zeit t_1, die somit als Ableitung von Gl. (1) mit der trigonometrischen Tangente des Tangentenwinkels τ der Wegkurve übereinstimmt. Auf der endlichen Strecke $s - s_1$ wird diese Geschwindigkeit im allgemeinen selbst veränderlich sein, und daher kann der Quotient (2) nur die Bedeutung eines Mittelwertes, d. h. einer mittleren Geschwindigkeit haben.

Beide Ausdrücke (2) und (3) stimmen dann und nur dann überein, wenn die Geschwindigkeit an allen Punkten und zu

jeder Zeit denselben Wert besitzt. In diesem Falle der konstanten Geschwindigkeit sprechen wir von einer gleichförmigen Bewegung, der als Wegkurve eine Gerade (Fig. 86) entspricht. Demgegenüber bezeichnen wir eine Bewegung mit veränderlicher Geschwindigkeit als eine ungleichförmige, und zwar, je nachdem die Geschwindigkeit mit der Zeit zu- oder abnimmt, als eine beschleunigte oder verzögerte

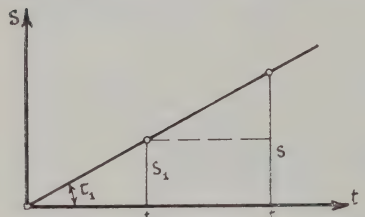

Fig. 86.

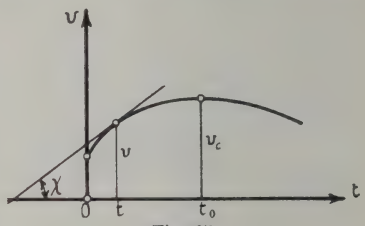

Fig. 87.

Bewegung. Um über die Veränderung der Geschwindigkeit Aufschluß zu erhalten, leiten wir aus der Wegkurve Fig. 85 durch Auftragen der Werte $v = \operatorname{tg} \tau$ als Ordinaten in ihrer Abhängigkeit von der Zeit die sog. Geschwindigkeitskurve (Fig. 87) ab, deren Gleichung durch

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

gegeben ist. Bezeichnen wir ferner mit χ den Tangentenwinkel dieser Kurve, so liefert

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = f''(t) = \operatorname{tg} \chi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

das gesuchte Maß für die Änderung der Geschwindigkeit mit der Zeit in gleicher Weise, wie $v = \operatorname{tg} \tau$ für den Zuwachs des Weges mit der Zeit. Die Ableitung (5) der Geschwindigkeit nach der Zeit, welche mit dem zweiten Differentialquotienten des Weges nach der Zeit identisch ist, nennen wir alsdann die Beschleunigung im Punkte s bzw. zur Zeit t. Verschwindet diese Beschleunigung an einer Stelle s_0 zur Zeit t_0 entsprechend einem Wendepunkte in der Wegkurve Fig. 85, so erreicht dort nach den Sätzen des § 13 die Geschwindigkeit ein Maximum oder ein Minimum v_0, während das Verschwinden der Beschleunigung auf dem ganzen Wege bzw. zu allen Zeit-

punkten auf eine konstante Geschwindigkeit, also eine gleichförmige Bewegung hindeutet. Die Geschwindigkeitskurve der durch Fig. 86 dargestellten gleichförmigen Bewegung ist demnach eine Parallele zur t-Achse.

1. Beispiel. In Fig. 88 ist durch die gebrochene Linie $OA'A''B'B''C$ die Wegkurve eines Eisenbahnzuges zwischen den beiden Endstationen O und C_0 dargestellt, der auf den Zwischenstationen A_0 und B_0 Aufenthalte besitzt, deren Dauer den Längen $A'A''$ und $B'B''$ entspricht, während die ganze Reisedauer durch die Länge OC' gegeben ist. Ein während dieser Reisedauer zwischen O und C_0 verkehrender, unterwegs nicht haltender Schnellzug verläßt die Ausgangsstation um die der Länge OO_1 entsprechende Zeit später und überholt den ersten Zug auf der ersten Station während dessen Aufenthaltes, so daß seine Wegkurve durch die Gerade O_1C_1 mit der Reisezeit O_1C_1' dargestellt ist. Trägt man in derselben Weise nach dem Kursbuch weitere, auch in entgegengesetzter Richtung laufende Züge ein, so erhält man einen sog. graphischen Fahrplan, wie er im Eisenbahnbetriebe zur Übersicht der Zugkreuzungen vielfach benutzt wird. Derselbe gibt natürlich über die infolge des beschleunigten Anlaufes und des verzögerten Auslaufes der Züge ungleichförmige Bewegung, bzw. über die Geschwindigkeitsänderungen während der Fahrt keine Auskunft, sondern liefert nur durch die Neigung der Wegkurvenstücke die mittlere Fahrgeschwindigkeit zwischen den Stationen.

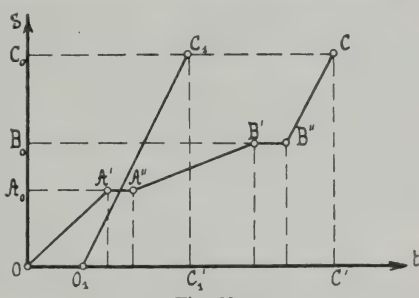

Fig. 88.

2. Beispiel. Die Zeit zum Durchlaufen einer Weglänge s mit der mittleren Geschwindigkeit v ergibt sich durch Division beider zu $t = s : v$. Um daher in Fig. 89 von einem Punkte P_1 mit den Koordinaten $x_1 y_1$ zu einem Punkte P_2 mit $x_2 y_2$ auf der andern Seite der Abszissenachse über P mit x derart zu gelangen, daß die Geschwindigkeit oberhalb derselben unverändert gleich c_1, unterhalb dagegen c_2 ist, braucht man die Zeit

$$t = \frac{\sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}}{c_2},$$

die somit nur noch von der durch x gegebenen Lage von P abhängt. Soll diese gesamte Bewegungsdauer ein Minimum sein, so folgt

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x - x_1}{c_1 \sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2}} - \frac{x_2 - x}{c_2 \sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}} = 0$$

oder auch unter Einführung der Bahnwinkel ϑ_1 und ϑ_2 mit der Normalen in P

$$\frac{\sin \vartheta_1}{c_1} = \frac{\sin \vartheta_2}{c_2} \text{ oder } \frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Es ist dies nichts anderes als das Snelliussche Brechungsgesetz eines Lichtstrahles an der Grenze zweier sog. Medien, in denen somit das Licht verschiedene Geschwindigkeiten besitzt. Daß es sich hierbei nicht um ein Maximum von t handeln kann, folgt ohne Bestimmung des Vorzeichens der zweiten Ableitung von t nach x schon aus dem Umstande, daß t mit x selbst unbegrenzt wachsen muß, so daß also das Maximum $t = \infty$ erst für $x = \infty$ erreicht werden kann.

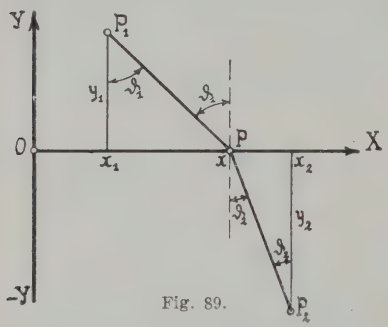

Fig. 89.

3. Beispiel. Lassen wir in einem luftleeren Raume — z. B. einer ausgepumpten Glasröhre — beliebige Körper herabfallen, so beobachten wir, daß sie sämtlich in gleichen Zeiten dieselben Strecken s zurücklegen, welche ihrerseits den Quadraten der Fallzeiten t proportional sind, so zwar, daß mit einem konstanten Faktor a

$$s = a t^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Dies ist aber nach § 5 Gl. (11) die Scheitelgleichung einer Parabel, die hiernach die Wegkurve bildet, welche wir der Fallbewegung gemäß in Fig. 90 mit nach unten gerichteten Ordinaten gezeichnet haben. Durch Differentiation erhalten wir weiter mit $2a = g$

$$v = 2at = gt \quad . \quad . \quad . \quad (6\,a),$$

d. h. die Fallgeschwindigkeit im luftleeren Raume wächst proportional der Zeit. Schließlich folgt daraus noch

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = 2a = g \quad . \quad (6\,b),$$

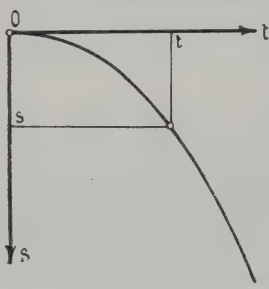

Fig. 90.

also eine konstante nach unten gerichtete Beschleunigung, die sich durch den Versuch zu $g = 9{,}81$ m/Sek² ergibt, wenn wir den Weg in Metern m, die Zeit in Sekunden und daher die Geschwindigkeit v in m/Sek ausdrücken, wonach die Beschleunigung

durch nochmalige Division mit der Zeit in m/Sek² erscheint. Die so ermittelte konstante Beschleunigung g, der alle Körper an der Erdoberfläche unterworfen sind, wollen wir kurz die Erdbeschleunigung nennen.

§ 16. Geschwindigkeit und Beschleunigung bei krummliniger Bewegung.

Die im letzten Paragraphen betrachtete gradlinige Bewegung ist, wie die Beobachtung unserer Umgebung zeigt, ein nur selten vorkommender Spezialfall. Meistens beschreiben die einzelnen Punkte eines bewegten Körpers sehr verwickelte Kurven, die wir als ihre Bahnen bezeichnen wollen. Die analytische Geometrie hat uns nun gelehrt, diese Bahnen durch Gleichungen zwischen ihren Koordinaten darzustellen, die im Falle eines bewegten Punktes ebenso mit der Zeit veränderlich sind, wie der Abstand s von einer Anfangslage bei geradliniger Bewegung. Haben wir es also mit einer ebenen Bahn zu tun, so können wir die Abhängigkeit der Punktkoordinaten x, y von der Zeit t durch zwei Gleichungen

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ausdrücken, aus denen durch Elimination der Zeit t die Bahngleichung resultiert. Durch die beiden Gleichungen (1) haben wir also die krummlinige Bewegung des betrachteten Punktes auf die beiden geradlinigen Bewegungen seiner Projektionen in der X- und Y-Richtung zurückgeführt, bzw. in zwei zu einander senkrechte geradlinige Bewegungen zerlegt, deren Vereinigung oder Zusammensetzung die krummlinige Bewegung wieder ergeben würde.

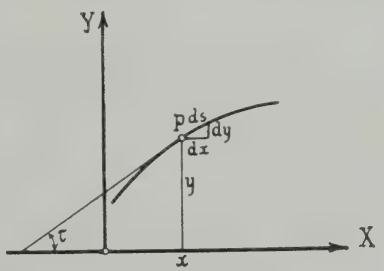

Fig. 91.

Bezeichnen wir nun ein Element der Bahn (Fig. 91) selbst mit ds, den Tangentenwinkel der Bahn an der ins Auge gefaßten Stelle gegen die X-Achse mit τ, und die Differentiale der Koordinaten mit dx bzw. dy, so ist, wie schon in § 8 an Hand der Fig. 53 gezeigt wurde,

$$dx = ds \cos\tau, \quad dy = ds \sin\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Dividieren wir diese unendlich kleinen Strecken auf den Koordinatenachsen mit dem Zeitelemente dt, so erhalten wir offenbar die Geschwindigkeiten der Projektionen des Punktes, nämlich

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt}\cos\tau, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{ds}{dt}\sin\tau \quad . \quad . \quad . \quad (2a),$$

während analog $ds:dt$ die Bahngeschwindigkeit bedeutet. Schreiben für diese kürzer v, für die der Projektionen bzw. v_x und v_y, so haben wir auch mit Rücksicht auf (1)

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v\cos\tau = f_1'(t) \\ v_y &= v\sin\tau = f_2'(t) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Daraus folgt aber sofort durch Quadrieren und Addieren

$$v_x^2 + v_y^2 = v^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3a)$$

d. h. die als Strecke aufgetragene Bahngeschwindigkeit bildet mit den beiden Geschwindigkeiten der Projektionen ein rechtwinkliges Dreieck (Fig. 92),

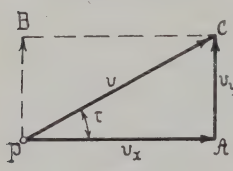

Fig. 92.

dessen einer Winkel, nämlich zwischen v und v_x mit dem Tangentenwinkel der Bahn gegen die X-Achse übereinstimmt. In diesem Dreieck bezeichnen wir nun die Projektionsgeschwindigkeiten als die beiden Geschwindigkeitskomponenten, die Bahngeschwindigkeit als ihre Resultante, die wir auch als Diagonale PC des aus den Komponenten PA und PB gebildeten Rechteckes auffassen können. Die Bewegung des Punktes in der Bahn vollzieht sich also genau so, als wenn wir ihm zwei zueinander senkrechte, voneinander unabhängige Geschwindigkeiten erteilt hätten, deren jede für sich mit der Zeit veränderlich oder konstant sein kann. Sind beide Geschwindigkeitskomponenten v_x und v_y konstant, so gilt dies nach (3a) nicht nur von der Resultante, sondern auch vom Neigungswinkel der Bahn, der sich aus (3) durch Division zu

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{v_y}{v_x} = \frac{dy}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3b)$$

berechnet, d. h. zwei zueinander senkrechte konstante Geschwindigkeitskomponenten haben eine geradlinige gleichförmige Bewegung zur Folge.

Es fragt sich nun, ob wir einem Punkte auch zwei zueinander um den Winkel ϑ geneigte Geschwindigkeiten v' und v'' erteilen können. Ist dieser Winkel $\vartheta = 0$, so sind diese Geschwindigkeiten gleich gerichtet, was darauf hinausläuft, daß wir etwa die Unterlage, auf der sich der Punkt mit der Geschwindigkeit v' bewegt, in derselben Richtung mit der Geschwindigkeit v'' fortschreiten lassen. Alsdann addiert sich die Bewegung der Unterlage einfach zu der des Punktes auf ihr, d. h. zwei gleichgerichtete Geschwindigkeiten addieren sich algebraisch. Diesen Satz wenden wir nun sofort auf die Komponenten der gegeneinander geneigten Geschwindigkeiten v' und v'' an, die wir in Fig. 93 mit $v_x' v_y'$, $v_x'' v_y''$ bezeichnen und erhalten dadurch die Komponenten der Resultante, nämlich

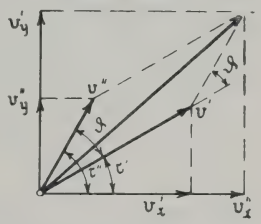

Fig. 93.

$$v_x = v_x' + v_x'', \quad v_y = v_y' + v_y'',$$

während die Resultante v selbst sich aus

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = (v_x' + v_x'')^2 + (v_y' + v_y'')^2$$

berechnet. Lösen wir die Klammern auf und beachten, daß nach (3a)

$$v_x'^2 + v_y'^2 = v'^2, \quad v_x''^2 + v_y''^2 = v''^2$$

ist, so folgt

$$v^2 = v'^2 + v''^2 + 2(v_x' v_x'' + v_y' v_y'').$$

Sind weiter τ' und τ'' die Winkel von v' und v'' gegen die X-Achse, so ist

$$\frac{v_x'}{v'} = \cos\tau', \quad \frac{v_x''}{v''} = \cos\tau'', \quad \frac{v_y'}{v'} = \sin\tau', \quad \frac{v_y''}{v''} = \sin\tau''$$

oder

$$v_x' v_x'' + v_y' v_y'' = v' v'' (\cos\tau' \cos\tau'' + \sin\tau' \sin\tau'')$$
$$= v' v'' \cos(\tau'' - \tau')$$

und, da $\tau'' - \tau' = \vartheta$ den Neigungswinkel zwischen v' und v'' bedeutet

$$v^2 = v'^2 + v''^2 + 2 v' v'' \cos\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Die Resultante zweier zueinander geneigter Geschwindigkeiten ergibt sich also, wie in Fig. 93 angedeutet ist, als Diagonale des aus den beiden Geschwindigkeiten gebildeten Parallelogramms, bzw. als Schlußlinie des Dreiecks der aneinander ge-

reihten Komponenten. Dieser Satz ist offenbar die Verallgemeinerung der Zusammensetzung zweier rechtwinkeliger Geschwindigkeiten und läßt sich ohne weiteres auf mehr als zwei Geschwindigkeiten ausdehnen, durch deren Aneinanderreihung sich ein Polygon ergibt, dessen Schlußlinie nach Größe und Richtung die resultierende Geschwindigkeit darstellt.

Wir kehren nunmehr wieder zu der durch die Formeln (1) bzw. (3) gegebenen krummlinigen Bewegung eines Punktes in einer ebenen Kurve zurück und bilden durch weitere Ableitung von (3) die Beschleunigungen der Projektionen auf beide Achsen, die wir mit q_x und q_y bezeichnen wollen, so daß also

$$\left.\begin{aligned} q_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = f_1''(t) \\ q_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = f_2''(t) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

ist. Führen wir die Differentiation in der Formel (3a) durch, so folgt

$$v_x \frac{dv_x}{dt} + v_y \frac{dv_y}{dt} = v \frac{dv}{dt}$$

oder nach Division mit v sowie Einführung von q_x und q_y nach (5)

$$\frac{v_x}{v} q_x + \frac{v_y}{v} q_y = \frac{dv}{dt},$$

wofür wir auch mit Rücksicht auf (3) schreiben dürfen

$$\frac{dv}{dt} = q_x \cos\tau + q_y \sin\tau \quad \ldots\ldots \quad (6).$$

Hierin bedeutet aber $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$ nichts anderes als die Beschleunigung längs der Bahn, die sog. Bahnbeschleunigung, die mit der Bahngeschwindigkeit die Richtung der Bahntangente besitzt und durch Summierung der Projektionen der beiden als Strecken von bestimmter Länge gegebenen sog. Achsenbeschleunigungen q_x und q_y auf diese Tangente erhalten wird (Fig. 94).

Um weiterhin zu entscheiden, ob nicht auch senkrecht zur Bahn eine Beschleunigung wirkt, differenzieren wir die Gl. (3b) beiderseitig und erhalten

$$\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = \frac{v_x\,dv_y - v_y\,dv_x}{v_x^2}$$

oder wegen $v_x = v\cos\tau$ und nach Division mit dt

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{v_x}{v^2}\frac{dv_y}{dt} - \frac{v_y}{v^2}\frac{dv_x}{dt}.$$

Daraus wird unter Einführung des Krümmungsradius ϱ der Bahn § 12 Gl. (11b) durch $ds = \varrho\,d\tau$, sowie mit (3) und (5)

$$\frac{v}{\varrho}\frac{ds}{dt} = q_y\cos\tau - q_x\sin\tau,$$

oder, da $\frac{ds}{dt} = v$ ist, auch

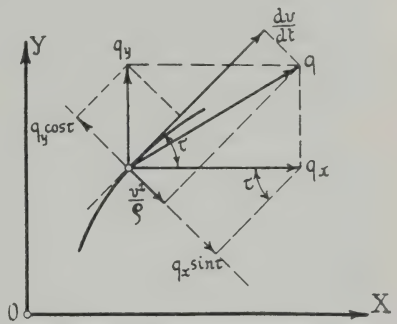

Fig. 94.

$$\frac{v^2}{\varrho} = q_y\cos\tau - q_x\sin\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung stellt aber die Differenz, bzw. die algebraische Summe der Projektionen der beiden Achsenbeschleunigungen auf die Normale zur Bahn dar (Fig. 94), welche somit eine sog. Normalbeschleunigung im Betrage $v^2:\varrho$ ergibt. Quadrieren und addieren wir die beiden Formeln (6) und (7), so folgt unabhängig von der (willkürlichen) Lage des Achsenkreuzes

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\varrho}\right)^2 = q_x^2 + q_y^2 = q^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

wonach wir q als die resultierende Beschleunigung ansprechen können, die sich, wie in Fig. 94 ersichtlich, sowohl aus den beiden Achsenbeschleunigungen, wie auch aus der Bahn- und Normalbeschleunigung nach derselben Regel zusammensetzt wie die Bahngeschwindigkeit aus ihren beiden Komponenten.

Infolge des Auftretens der Normalbeschleunigung fällt die resultierende Beschleunigung nicht in die Bahntangente. Dies kann vielmehr nur dann eintreten, wenn mit $\varrho = \infty$ die Bahn geradlinig ist oder an der ins Auge ge-

faßten Stelle einen Wendepunkt besitzt. Hiernach können wir die Normalbeschleunigung geradezu als die Ursache der Abweichung des bewegten Punktes von der geraden Bahn ansehen und müssen ferner schließen, daß sie nach der Seite dieser Abweichung, d. h. nach dem Krümmungsmittelpunkt der Bahn gerichtet ist. Aus diesem Grunde wird sie häufig als Zentripetalbeschleunigung angesprochen, während die ihr entgegengesetzt gerichtete Zentrifugalbeschleunigung den Körper in die Bahntangente zurückzuführen strebt.

1. Beispiel. Wie wir am Schlusse des letzten Paragraphen aus der Erfahrung ableiteten, unterliegt jeder Körper in der Nähe der Erdoberfläche einer vertikal nach unten gerichteten konstanten Beschleunigung g, wenn wir von dem störenden Einflusse der Luft absehen dürfen. Dies trifft auch noch für eine Wurfbewegung in beliebiger Richtung zu, die wir uns nach den obenstehenden Ausführungen in eine horizontale und vertikale zerlegt denken können. Da in horizontaler Richtung somit keine Beschleunigung wirkt, so ist hierfür $q_x = 0$ zu setzen, während bei nach oben gerichteter Y-Achse die Vertikalbeschleunigung $q_y = -g$ wird. Damit lauten die beiden Formeln (5)

$$\frac{dv_x}{dt} = 0, \quad \frac{dv_y}{dt} = -g \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

und liefern durch Integration mit zwei Konstanten c_1 und c_2

$$v_x = c_1, \quad v_y = c_2 - gt \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9\,a),$$

d. h. die Horizontalbewegung eines im luftleeren Raume geworfenen Körpers verläuft gleichförmig, die aufwärts gerichtete Vertikalbewegung dagegen gleichförmig verzögert. Die beiden Konstanten c_1 und c_2 bedeuten offenbar nichts anderes als die Anfangswerte der beiden Geschwindigkeitskomponenten für die Zeit $t = 0$, in der die Bewegung im Koordinatenanfang, d. h. mit $x = 0$, $y = 0$ beginnen möge. Schreiben wir dann an Stelle von (9a)

$$\frac{dx}{dt} = c_1, \quad \frac{dy}{dt} = c_2 - gt,$$

so folgt durch abermalige Integration

$$x = c_1 t, \quad y = c_2 t - \frac{g}{2} t^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10),$$

woraus sich nach Elimination von t die Bahngleichung

$$y = \frac{c_2}{c_1} x - \frac{g}{2 c_1^2} x^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10\,a)$$

ergibt. Setzen wir hierin $y = 0$, so erhalten wir aus

$$\frac{x}{c_1}\left(c_2 - \frac{g\,x}{2\,c_1}\right) = 0$$

die beiden Wurzeln $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2\,c_1\,c_2}{g}$, von denen die erste dem Ausgangspunkt O, die zweite dem Punkte A in Fig. 95 zugehört und die sog. Wurfweite darstellt. Die größte Höhe der Wurfbahn wird im Punkte S für $\frac{dy}{dt} = v_y = 0$, also nach (9a) für die Zeit $t_0 = \frac{c_2}{g}$ erreicht; ihr entsprechen nach (10) die Koordinaten

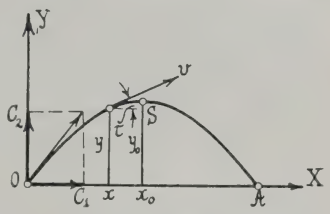

Fig. 95.

$$x_0 = \frac{c_1\,c_2}{g},\quad y_0 = \frac{{c_2}^2}{2\,g} \quad . \quad (10\,\mathrm{b}),$$

wovon die Abszisse mit der halben Wurfweite übereinstimmt. Verschieben wir den Koordinatenanfang nach S, setzen also $x = x_0 + \xi$, $y = y_0 + \eta$, so geht (10a) über in

$$\eta = \frac{g}{2\,c_1}\,\xi^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10\,\mathrm{c}),$$

also in die Scheitelgleichung einer Parabel mit vertikaler Achse, weshalb man auch die Bahn kurz als Wurfparabel bezeichnet. Sie läßt sich praktisch am genauesten an einem Flüssigkeitsstrahl verwirklichen, weil hierbei der Einfluß der umgebenden Luft nur sehr gering ist.

Die Bahngeschwindigkeit v an einer beliebigen Stelle folgt nunmehr aus (9a) zu

$$v^2 = {v_x}^2 + {v_y}^2 = {c_1}^2 + {c_2}^2 - 2\,g\left(c_2\,t - \frac{g}{2}\,t^2\right)$$

oder unter Einführung der Anfangsgeschwindigkeit c durch ${c_1}^2 + {c_2}^2 = c^2$ sowie mit (10)

$$v^2 = c^2 - 2\,g\,y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11),$$

d. h. bei vorgelegter Anfangsgeschwindigkeit ist die Bahngeschwindigkeit in der Wurfparabel nur von der Höhe über dem Ausgangspunkt abhängig. Weiter folgt aus (11) durch Differentiation

$$\frac{v\,dv}{dt} = -\,g\,\frac{dy}{dt} = -\,g\,v_y,$$

woraus nach Dividieren mit v sowie unter Einführung der Bahnneigung τ die Bahnbeschleunigung

$$\frac{dv}{dt} = -g \sin \tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11\,a)$$

hervorgeht, während die Normalbeschleunigung sich aus (7) zu

$$\frac{v^2}{\varrho} = -g \cos \tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11\,b)$$

berechnet.

2. Beispiel. Bewegt sich ein Punkt in einem Kreise vom Radius r um den Anfang O, so ist mit dem von der Abszissenachse aus gerechneten Drehwinkel des Fahrstrahls (Fig. 16) das Bogenelement $ds = r\,d\varphi$ und daher die Bahngeschwindigkeit

$$v = \frac{ds}{dt} = r\,\frac{d\varphi}{dt} = r\,\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12),$$

worin $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$ die Winkelgeschwindigkeit der Drehung um O heißt. Ist im besonderen Falle die Bahngeschwindigkeit konstant, so trifft dies auch für die Winkelgeschwindigkeit ω zu, und wir erhalten für die Projektion des Punktes auf die beiden Achsen

$$\left.\begin{aligned} x &= r \cos \varphi = r \cos \omega t \\ y &= r \sin \varphi = r \sin \omega t \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12\,a),$$

wenn wir die Zeit vom Momente des Passierens des Punktes A auf der Abszissenachse an rechnen, also $\varphi = \omega t$ setzen. Hieraus folgt sofort, daß die Wegkurven beider Achsenbewegungen Sinuslinien sind, bzw. daß die beiden Projektionen des im Kreise bewegten Punktes wie dieser selbst periodisch immer wieder dieselbe Lage mit derselben Geschwindigkeit passieren. Einen solchen Vorgang bezeichnen wir alsdann als eine Schwingungsbewegung oder kurzweg als Schwingung, die Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden gleichsinnigen Durchgängen durch dieselbe Lage als die Schwingungsdauer, die hier offenbar mit der Dauer eines ganzen Umlaufes der Kreisbewegung

$$t_0 = \frac{2\pi}{\omega} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12\,b)$$

zusammenfällt. Daher kann man auch an Stelle von (12a) schreiben

$$\left.\begin{aligned} x &= r \cos 2\pi \frac{t}{t_0} \\ y &= r \sin 2\pi \frac{t}{t_0} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12\,c).$$

Die Geschwindigkeitskomponenten der Kreisbewegung, welche mit den Geschwindigkeiten der Schwingungen in den Achsenrichtungen zusammenfallen, sind hiernach

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = -r\omega\sin\omega t = -v\sin\omega t \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = \quad r\omega\cos\omega t = \quad v\cos\omega t \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

also ebenfalls periodisch veränderlich. Schließlich erhalten wir für die Beschleunigungskomponenten mit Rücksicht auf (5)

$$\left.\begin{aligned} q_x &= \frac{dv_x}{dt} = -v\omega\cos\omega t = -r\omega^2\cos\omega t = -\omega^2 x \\ q_y &= \frac{dv_y}{dt} = -v\omega\sin\omega t = -r\omega^2\sin\omega t = -\omega^2 y \end{aligned}\right\} \quad . \quad (13\,a),$$

d. h. wiederum eine periodische Veränderlichkeit, während die resultierende Beschleunigung bei konstantem v und wegen der Übereinstimmung des Krümmungsradius ϱ mit r sich zu

$$q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2} = -r\omega^2 = -\frac{v^2}{r} \quad . \quad . \quad . \quad (13\,b)$$

ergibt, mithin mit der Normalbeschleunigung zusammenfällt. Wegen der durch (5) gegebenen Bedeutung der Komponenten q_x und q_y dürfen wir mit Rücksicht auf (12 a) an Stelle von (13 a) auch schreiben

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (13\,c).$$

Man übersieht, daß die Gleichungen (12 a) im Einklang mit Beispiel 4 § 12 Lösungen dieser letzten Formeln darstellen, sowie daß sowohl die resultierende Beschleunigung, wie auch ihre Komponenten dem Abstande vom Koordinatenanfang proportional und wegen des negativen Vorzeichens nach diesem Anfang hin gerichtet sind.

3. Beispiel. Bewegt sich ein Punkt unter dem Einfluß einer beliebigen Beschleunigung auf einer fest vorgeschriebenen Bahn, so kann er offenbar der normal zur Bahn gerichteten Beschleunigungskomponente nicht folgen, die mithin wirkungslos wird. Liegt die Bahn (Fig. 96) insbesondere in einer Vertikalebene, so unterliegt der Punkt P der nach unten gerichteten Erdbeschleunigung g,

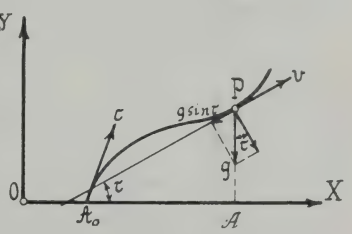

Fig. 96.

von der indessen nur die Komponente $g\sin\tau$ in der Tangentenrichtung zur Wirkung gelangt, so daß wir für die Bahnbeschleunigung erhalten

$$\frac{dv}{dt} = -g\sin\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Multiplizieren wir diese Gleichung beiderseitig mit ds und beachten, daß $ds = v\,dt$ und mit $AP = y$, $ds \sin\tau = dy$ ist, so folgt

$$v\,dv = -g\,ds\sin\tau = -g\,dy \quad \ldots\ldots \quad (14\,a),$$

oder integriert

$$\frac{v^2}{2} = C - g\,y.$$

Passiert ferner der Punkt die Abszissenachse bei A_0 mit der Geschwindigkeit c, so wird mit $y = 0$

$$\frac{c^2}{2} = C$$

oder

$$v^2 = c^2 - 2\,g\,y \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14\,b).$$

Das ist aber dieselbe Gleichung, die wir bereits oben unter (11) für die Geschwindigkeitsänderung längs der Wurfparabel unter dem Einflusse der Erdbeschleunigung erhielten, so daß allgemein die Bahngeschwindigkeit bei vorgelegter Anfangsgeschwindigkeit nur mit der Höhenlage über dem Ausgangspunkt variiert, und zwar unabhängig von der Form der freien oder vorgeschriebenen Bahn. Durchfällt also ein Körper eine Höhe $h = -y$ ohne Anfangsgeschwindigkeit, d. h. mit $c = 0$, so kommt er unten stets mit der Geschwindigkeit $v = \sqrt{2\,g\,h}$ an, deren Richtung natürlich je nach der durchlaufenen Bahn sehr verschieden sein kann.

4. Beispiel. Der Endpunkt P einer um O drehbaren Geraden (Fig. 97) beschreibt einen Kreisbogen, der als fest vorgeschriebene Bahn im Sinne des vorigen Beispiels anzusehen ist. Befindet sich in P ein kleiner Körper, der mit O durch einen dünnen Draht verbunden ist, so erhalten wir ein sog. Pendel, welches dann als ein mathematisches Pendel bezeichnet wird, wenn die Erdbeschleunigung g nur auf den Endpunkt P wirkt. Ist φ der Ausschlagswinkel des Pendels aus der Vertikalen OA_0, so erhalten wir mit der Pendellänge $OA_0 = OP = l$ für die Bahngeschwindigkeit

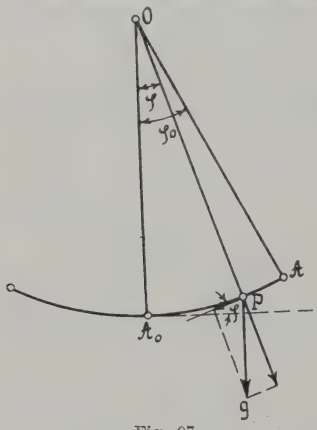

Fig. 97.

$$v = \frac{l\,d\varphi}{dt}$$

und, da hier $\tau = \varphi$ ist, aus (14)

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15),$$

worin $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ die sog. Winkelbeschleunigung bedeutet. Für kleine Ausschläge φ, deren Sinus nach § 12 Gl. (5a) mit dem Bogen vertauscht werden darf, dürfen wir hierfür angenähert schreiben

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15\,a),$$

eine Gleichung, die uns schon mehrfach, zuletzt im obigen 2. Beispiele begegnet ist, wenn wir von der Verschiedenheit der Bezeichnung der Veränderlichen und des konstanten Faktors rechts absehen. Die allgemeinste Lösung ist schon im 4. Beispiel des § 12 gegeben worden; sie enthält zwei zunächst willkürliche Konstanten A und B und lautet, wenn wir dort [vgl. Gl. (10)] $y = \varphi$, $\alpha^2 = \frac{g}{l}$ setzen

$$\varphi = A\cos t\sqrt{\frac{g}{l}} + B\sin t\sqrt{\frac{g}{l}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Durch zweimalige Differentiation und Einsetzen in (15a) kann sich der Leser nochmals von der Richtigkeit dieses Ergebnisses überzeugen. Soll nun für $t = 0$, $\varphi = 0$ sein, so folgt hieraus $A = 0$, so daß sich (16) in

$$\varphi = B\sin t\sqrt{\frac{g}{l}} = \varphi_0 \sin t\sqrt{\frac{g}{l}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16\,a)$$

vereinfacht, worin $B = \varphi_0$ offenbar den größten Ausschlag bedeutet, der hiernach zu beiden Seiten der Vertikalen gleich ausfällt. Das Pendel vollzieht also eine Schwingungsbewegung analog der im 2. Beispiel oben besprochenen Bewegung der Projektion eines gleichförmig in einem Kreise laufenden Punktes. Es erreicht den Ausgangspunkt mit gleichgerichteter Geschwindigkeit wieder nach der vierfachen Zeit zum einmaligen Durchlaufen des Bogens $\varphi = \varphi_0$, der (in 16a) ein Bogen von

$$t\sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{\pi}{2}$$

entspricht. Daher ist die ganze Schwingungsdauer des Pendels für einen vollen Hin- und Hergang

$$t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

zwar abhängig von der Pendellänge, nicht aber von der Größe des Ausschlagswinkels φ_0, wenn dieser nur als klein angesehen werden darf. Hierauf beruht die Verwendung des Pendels zur direkten Zeitmessung bzw. zur Regulierung von Uhren.

5. Beispiel. Lassen wir das in Fig. 97 dargestellte Pendel um die Vertikale OA_0 mit einer Winkelgeschwindigkeit ω gleichförmig

rotieren, so stellt sich erfahrungsgemäß eine bestimmte Neigung φ der Pendelgeraden OP derart ein, daß der kleine Körper P einen horizontalen Kreis beschreibt (Fig. 98), dessen Radius $r = l \sin\varphi$ ist. Die auf den Pendelkörper wirkende Erdbeschleunigung zerfällt in diesem Falle in zwei Komponenten, von denen die eine in die Richtung OP fallende durch die starre Gerade aufgehoben wird, während die Horizontalkomponente $g \operatorname{tg}\varphi$ nach dem Kreismittelpunkte zu gerichtet ist und daher mit der Normalbeschleunigung $r\omega^2$ der Kreisbewegung (vgl. Beispiel 2) übereinstimmt. Wir erhalten aber durch Gleichsetzen

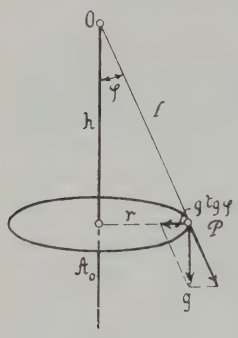

Fig. 98.

$$r\omega^2 = l \sin\varphi\, \omega^2 = g \operatorname{tg}\varphi$$

oder

$$l \cos\varphi = h = \frac{g}{\omega^2} \quad . \quad . \quad . \quad (18),$$

so daß also jeder Winkelgeschwindigkeit ω ein bestimmter Ausschlagswinkel φ bzw. ein Abstand h des Kreismittelpunktes vom Aufhängepunkt O entspricht. Infolgedessen kann man aus dieser Höhe h unmittelbar die Größe der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{h}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18a)$$

ermitteln, weshalb man ein derartiges Zentrifugalpendel wohl auch als Tachometer bezeichnet. Ist t_0 die Umlaufszeit der Rotation, so hat man auch $\omega t_0 = 2\pi$ oder

$$t_0 = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18b).$$

Die Umlaufszeit eines Zentrifugalpendels stimmt demnach mit der Schwingungsdauer Gl. (17) des mathematischen Pendels überein, dessen Länge gleich dem Abstand des Rotationskreises vom Aufhängepunkte ist.

§ 17. Die Zentralbewegung.

Geht die Richtung der resultierenden Beschleunigung q während des ganzen Bewegungsvorgangs durch einen festen Punkt, das sog. Beschleunigungszentrum, so sprechen wir von einer Zentralbewegung. Verlegen wir der Einfachheit halber den Koordinatenanfang O in das Beschleunigungszentrum und be-

zeichnen den Fahrstrahl des bewegten Punktes (xy) mit r (Fig. 99), so sind die beiden Beschleunigungskomponenten

$$q_x = q\frac{x}{r}, \quad q_y = q\frac{y}{r} \quad \ldots\ldots (1).$$

Multiplizieren wir diese Formeln mit dx und dy und addieren, so erhalten wir wegen $x^2 + y^2 = r^2$ oder $x\,dx + y\,dy = r\,dr$

$$q_x dx + q_y dy = q\frac{x\,dx + y\,dy}{r} = q\,dr \quad (1a).$$

Anderseits ist aber auch

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} \\ q_x &= \frac{dv_x}{dt}, \quad q_y = \frac{dv_y}{dt} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

oder eingesetzt in (1a)

$$v_x dv_x + v_y dv_y = q\,dr \quad . \quad (2a).$$

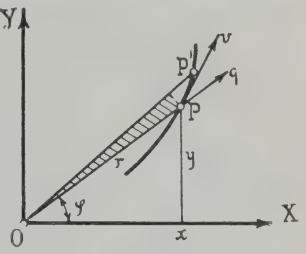

Fig. 99.

Daraus folgt schließlich unter Einführung der Bahngeschwindigkeit v durch

$$\left.\begin{aligned} v_x^2 + v_y^2 &= v^2 \\ v_x dv_x + v_y dv_y &= v\,dv \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (3)$$

kürzer

$$v\,dv = q\,dr \quad \ldots\ldots (4),$$

oder

$$q = v\frac{dv}{dr} = \frac{1}{2}\frac{d(v^2)}{dr} \quad \ldots\ldots (4a)$$

und umgekehrt

$$v^2 - v_0^2 = 2\int_0^r q\,dr \quad \ldots\ldots (4b).$$

Hierin ist die Integration nur ausführbar, wenn die Zentralbeschleunigung q als Funktion des Radius r vom Beschleunigungszentrum vorgelegt ist, womit sich dann die Bahngeschwindigkeit ebenfalls als Radialfunktion ergibt.

Multiplizieren wir aber die erste der beiden Ausgangsformeln (1) mit y, die zweite mit x und subtrahieren, so wird mit (2)

$$q_y x - q_x y = \frac{dv_y}{dt}x - \frac{dv_x}{dt}y = 0 \quad \ldots\ldots (5),$$

wofür wir auch nach der Produktenregel der Differentialrechnung, d. h. mit

$$y\frac{dv_x}{dt} = \frac{d(v_x y)}{dt} - v_x\frac{dy}{dt} = \frac{d(v_x y)}{dt} - v_x v_y$$

$$x\frac{dv_y}{dt} = \frac{d(v_y x)}{dt} - v_y\frac{dx}{dt} = \frac{d(v_y x)}{dt} - v_x v_y$$

schreiben dürfen

$$\frac{d}{dt}(xv_y - yv_x) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5\,a)$$

oder integriert mit einer Konstanten C.

$$xv_y - yv_x = C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5\,b).$$

Die Bedeutung des links stehenden Ausdrucks erhellt am einfachsten, wenn wir unter Einführung des Fahrstrahlwinkels φ

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

setzen, woraus durch Differentiation nach der Zeit mit der Produktenregel

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = v_x &= \frac{dr}{dt}\cos\varphi - r\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} \\ \frac{dy}{dt} = v_y &= \frac{dr}{dt}\sin\varphi + r\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (6\,a)$$

und schließlich

$$xv_y - yv_x = r(v_y\cos\varphi - v_x\sin\varphi) = r^2\frac{d\varphi}{dt} \quad . \quad . \quad (6\,b)$$

sich berechnet. Darin ist aber

$$r^2 d\varphi = 2\,dF \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6\,c)$$

nichts anderes als der doppelte Flächeninhalt des in Fig. 99 schraffierten Elementardreiecks von der Höhe r und der Basis $r\,d\varphi$, welches bis auf das als unendlich kleine von zweiter Ordnung vernachlässigbare Produkt $r\,d\varphi\,dr$ mit dem Dreiecks OPP' aus zwei um den Winkel $d\varphi$ gegeneinander geneigten, also benachbarten Fahrstrahlen und dem Bahnelemente ds übereinstimmt. Führen wir diese Dreieckfläche in (5b) ein, so erhalten wir

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = 2\frac{dF}{dt} = C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

oder integriert mit der Konstanten F_0

$$F = \frac{C}{2}t + F_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7\,a)$$

d. h. die bei der Zentralbewegung vom Fahrstrahl nach dem Beschleunigungszentrum überstrichene Fläche wächst proportional mit der Zeit oder mit anderen Worten: der Fahrstrahl überstreicht bei der Zentralbewegung in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Durch Quadrieren und Addieren der beiden Formeln (6a) ergibt sich für die Bahngeschwindigkeit v wegen $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

oder auch mit (7)

$$v^2 = \left[\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2\right]\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{C^2}{r^4}\left[\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2\right] \quad . \quad (8),$$

worin sich die Ableitung $dr : d\varphi$ aus der in Polarkoordinaten r und φ vorgelegten Bahngleichung berechnet. Eliminiert man endlich aus (8) mit Hilfe der Bahngleichung den Winkel φ, so bleibt rechts nur eine Funktion des Radius r stehen, so daß nach Gl. (4a) auch die Zentralbeschleunigung nur eine Radialfunktion sein kann.

1. Beispiel. Kepler verdankt man die Feststellung, daß die Planeten 1. in Ellipsen die in einem Brennpunkte befindliche Sonne umkreisen, wobei 2. der Fahrstrahl von der Sonne aus in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht. Daraus dürfen wir nach den vorstehenden Ausführungen auf eine Zentralbewegung schließen und die Abhängigkeit der Zentralbeschleunigung vom Radius bestimmen. Schreiben wir die Gleichung der Bahnellipse mit dem Parameter p und der numerischen Exzentrizität ε, vergl. § 5 Gl. (1)

$$\frac{p}{r} = 1 - \varepsilon\cos\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9),$$

so folgt daraus durch Ableitung

$$-\frac{p}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} = \varepsilon\sin\varphi; \quad \frac{dr}{d\varphi} = -\varepsilon\frac{r^2}{p}\sin\varphi$$

oder

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{r^4}{p^2}\varepsilon^2\sin^2\varphi = \frac{r^4}{p^2}(\varepsilon^2 - \varepsilon^2\cos^2\varphi)$$

also nach Elimination von $\cos\varphi$ durch Gl. (9)

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{r^4}{p^2}\left[\varepsilon^2 - \left(1 - \frac{p}{r}\right)^2\right]$$

und eingesetzt in (8)

$$v^2 = C^2\left(\frac{\varepsilon^2 - 1}{p^2} + \frac{2}{pr}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9a)$$

Durch Differentiation dieses Ausdruckes nach r und Einführung in (4a) ergibt sich dann schon die gesuchte Zentralbeschleunigung

$$q = -\frac{C^2}{pr^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10),$$

also umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes vom Brennpunkt und wegen des negativen Vorzeichens nach dem Brennpunkt zu gerichtet, wie es Newton zuerst aus den Keplerschen Gesetzen abgeleitet hatte.

Nun ist aber nach Gl. (7) die Konstante C die doppelte in der Zeiteinheit vom Fahrstrahl überstrichene Fläche, oder, wenn $\pi a_1 b_1$ die ganze Fläche der Ellipse mit den Halbachsen a_1 und b_1 und t_1 die Umlaufszeit des Planeten bedeutet

$$C = \frac{2\pi a_1 b_1}{t_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11).$$

Außerdem ist der Ellipsenparameter nach § 5 Gl. (6)

$$p = \frac{b_1^2}{a_1}$$

und daher geht (10) über in

$$qr^2 = -\frac{4\pi^2 a_1^3}{t_1^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10a),$$

während für einen anderen Planeten, der sich in einer Ellipse mit den Halbachsen $a_2 b_2$ und der Umlaufszeit t_2 bewegt,

$$qr^2 = -\frac{4\pi^2 a_2^3}{t_2^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10b)$$

wird. Da nun beide Planeten die Sonne als gemeinsames Beschleunigungszentrum umkreisen, so sind die linken Seiten von (10a) und (10b) einander gleich oder im ganzen Bereich der Sonne konstant, woraus

$$\frac{a_1^3}{t_1^2} = \frac{a_2^3}{t_2^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

sich ergibt, d. h. die Quadrate der Umlaufszeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Achsen ihrer Bahnellipsen. Es ist dies das dritte von Kepler aus Beobachtungen direkt abgeleitete Gesetz, welches somit nur eine Folgerung der beiden ersten darstellt. Übrigens erkennt man aus der Gültigkeit der Gl. (9) auch für die Parabel ($\varepsilon^2 = 1$) und die Hyperbel ($\varepsilon^2 > 1$), daß Bewegungen in solchen offenen Bahnen ebenfalls auf die Beschleunigung (10) führen. Dies trifft wahrscheinlich

auf die nicht wiederkehrenden Kometen zu, für welche natürlich das dritte Keplersche Gesetz seinen Sinn verliert

2. Beispiel. Bewegt sich ein Punkt derart in einer Ellipse, daß sein Fahrstrahl vom Ellipsenzentrum aus in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht, so benutzen wir zweckmäßig die Zentralgleichung der Ellipse § 5 Gl. (7), für die wir mit den obigen Gleichungen (6) in Polarkoordinaten schreiben

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13),$$

woraus durch Differentiation

$$\frac{1}{r^3}\frac{dr}{d\varphi} = \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)\cos\varphi\sin\varphi$$

folgt. Dies liefert in (8)

$$v^2 = \frac{C^2}{r^4}\left[r^6\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi + r^2\right]$$

$$= C^2r^2\left[\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \frac{1}{r^4}\right]$$

oder, indem wir in der Klammer $1 : r^4$ durch (13) eliminieren,

$$v^2 = C^2r^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^4} + \frac{\sin^2\varphi}{b^4}\right) = C^2r^2\left[\frac{1}{a^2}\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{1}{b^2}\frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right]$$

$$v^2 = C^2r^2\left[\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right) + \frac{1}{b^2}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\cos^2\varphi}{a^2}\right)\right]$$

$$v^2 = C^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) - \frac{C^2r^2}{a^2b^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13\,a),$$

worin analog (11) mit der Umlaufszeit t

$$C = \frac{2\pi ab}{t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11\,a)$$

ist. Durch Differentiation von (13 a) und Einsetzen in (4 a) ergibt sich dann eine Zentralbeschleunigung

$$q = -\frac{C^2r}{a^2b^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14),$$

also dem Zentralabstand direkt proportional und nach dem Zentrum gerichtet, genau wie bei der in § 16, Beispiel 2, betrachteten Kreisbewegung, die sich hieraus mit $r = a = b$ als Sonderfall ergibt.

Schließlich erkennt man noch, daß für den Fall der Hyperbel in den vorstehenden Gleichungen nur b^2 durch $-b^2$ zu ersetzen ist, womit die Zentralbeschleunigung (14) vom Zentrum weggerichtet erscheint.

§ 18. Kraft und Masse.

Verhindern wir einen Körper, der unter dem Einflusse einer Beschleunigung steht, daran, dieser ganz oder teilweise zu folgen, so übt er auch auf das Hindernis eine Wirkung aus, die wir als eine Kraft bezeichnen. Diese Wirkung tritt z. B. in der Formänderung des körperlichen Hindernisses hervor und erweist sich gleichgerichtet und proportional der unterdrückten Beschleunigungskomponente. Außerdem aber wächst die Kraft auf das Doppelte, Dreifache usw. an, wenn wir statt des einen Körpers an der betreffenden Stelle zwei, drei usw. kongruente Körper gleichzeitig wirken lassen, so daß der Proportionalitätsfaktor m, mit dem wir die Beschleunigung q zu multiplizieren haben, um die Kraft

$$Q = mq \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

zu erhalten, ein Maß für die Körpergröße bildet, das wir seine Masse nennen. Weiterhin zeigt sich, daß auch der Körper selbst seitens des erwähnten Hindernisses eine — wiederum etwa durch eine Formänderung meßbare — Kraftwirkung erfährt, welche der von ihm ausgeübten entgegengesetzt gleich ist. Dieser Satz läßt sich erfahrungsgemäß dahin verallgemeinern, daß je zwei Körper aufeinander entgegengesetzt gleiche Kräfte ausüben (Wirkung und Gegenwirkung oder Aktion und Reaktion). So übt der Faden auf einen an ihm im Kreise um ein Zentrum herumgeschwungenen Stein eine der Normalbeschleunigung proportionale Normal- oder Zentripetalkraft aus, während der Faden selbst durch die ihr entgegengesetzt gleiche Zentrifugalkraft gespannt wird. Mit der Steigerung der Winkelgeschwindigkeit wachsen beide Kräfte, bis schließlich der Faden reißt. Damit aber hört die Kraftwirkung in der Normalen und zugleich die Normalbeschleunigung plötzlich auf, so daß der losgelassene Stein der noch übrigbleibenden Tangentialbeschleunigung folgen kann und daher in der Tangente zum Kreise fortfliegt.

Wird insbesondere ein Körper von der Masse m an der Erdoberfläche durch eine Unterlage gehindert, der Erdbeschleunigung g zu folgen, so nennen wir die Kraft

$$G = mg \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1\,a),$$

mit der er auf seine Unterlage drückt, sein Gewicht und benutzen ganz allgemein solche Gewichte als Kräftemaß. Als Grundeinheit wählt man in der Technik neben dem Meter (m) und der Sekunde (Sek) für Längen und Zeiten das Gewicht des Kubikdezimeters (Liters) Wasser (bei 4° C) das sog. Kilogramm, während man in der Physik neben dem Zentimeter (cm) und der Sekunde als neue Einheit die in einem Kubikzentimeter Wasser enthaltene, von der etwas veränderlichen Beschleunigung g unabhängige Masse von einem Gramm (g) zugrundelegt und die hieraus durch Multiplikation mit der Einheit der Beschleunigung (d. i. 1 cm/Sek²) erhaltene Krafteinheit als Dyne bezeichnet. Ein Gramm-Gewicht ist hiernach mit $g = 981$ cm/Sek² gleich 981 Dynen. Aus dem Gewichtsunterschiede gleichgroßer Körper von verschiedenem Stoffe schließen wir weiter auf eine verschiedene Konzentration der Masse im Stoffe selbst, deren Quotienten mit dem Volumen V wir als die Dichte δ des Stoffes bezeichnen. Anderseits benutzt man hierfür auch das als spezifisches Gewicht γ benannte Gewicht der Volumeneinheit derart, daß

$$\gamma = \frac{G}{V} = \frac{m}{V} g = \delta g \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

ist. Befindet sich in jedem Volumenelement eines Körpers dieselbe Masse, so besitzt er eine gleichförmige Massenverteilung, im anderen Falle, also wenn er z. B. aus verschiedenen Stoffen besteht, einer ungleichförmigen Massenverteilung. Körper der ersteren Art heißen wohl auch homogene, solche der zweiten inhomogene Körper.

Da die Kraft ebenso wie die ihr proportionale Beschleunigung eine Größe und eine Richtung besitzt, so können wir sie, wie diese und die Geschwindigkeit durch eine Strecke darstellen. Gehen mehrere solcher Strecken $Q_1 Q_2 Q_3 \ldots$ von einem Punkte P aus (Fig. 100a), so bezeichnen wir diesen als den Angriffspunkt der entsprechenden Kräfte, die wir erfahrungsgemäß, wie die zugehörigen Beschleunigungen nach der Parallelogramm- oder Polygonregel zusammensetzen können. Auf diese Weise ergibt sich ein sog. Kräftepolygon (Fig. 100b), dessen vom Angriffspunkt ausgehende Schlußlinie Q nach Größe und Richtung

die sog. Resultante aller Einzelkräfte darstellt, welche durch ihre Wirkung diese zu ersetzen vermag.

Umgekehrt können wir hiernach auch jede Einzelkraft in der Ebene nach zwei, im Raume nach drei zueinander senkrechten Richtungen zerlegen, bzw. auf die Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems projizieren, wodurch je zwei bzw. drei Komponenten entstehen, die wir den zugehörigen Koordinatenachsen entsprechend mit den Buchstaben X, Y bzw. Z

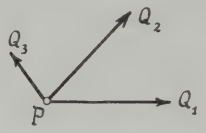

Fig. 100a.

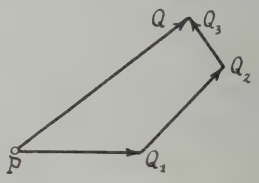

Fig. 100b.

bezeichnen. Sind α, β, γ die Neigungswinkel der Kraft Q gegen die drei Achsen, so wird diese durch die gleichzeitige Wirkung der drei Komponenten

$$X = Q\cos\alpha, \quad Y = Q\cos\beta, \quad Z = Q\cos\gamma \quad . \quad . \quad (3)$$

ersetzt, woraus durch Quadrieren und Addieren nach § 6 Gl. (3)

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = Q^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3\,a)$$

folgt. Beim Vorhandensein mehrerer Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt haben wir nur die in jede der drei Richtungen fallenden Komponenten für sich zu summieren und erhalten so für die Resultante mit den Richtungswinkeln $\alpha\,\beta\,\gamma$

$$\left.\begin{aligned} Q\cos\alpha &= Q_1\cos\alpha_1 + Q_2\cos\alpha_2 + \ldots = \Sigma X \\ Q\cos\beta &= Q_1\cos\beta_1 + Q_2\cos\beta_2 + \ldots = \Sigma Y \\ Q\cos\gamma &= Q_1\cos\gamma_1 + Q_2\cos\gamma_2 + \ldots = \Sigma Z \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (4).$$

Ist mit $Q = 0$ keine Resultante vorhanden, d. h. schließt sich das Kräftepolygon von selbst, so üben die Kräfte insgesamt keine Wirkung mehr aus, oder heben sich auf. Dieser Zustand des sog. Gleichgewichts der Kräfte an einem Punkt wird somit durch die drei Bedingungen

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4\,a)$$

gekennzeichnet, von denen im Falle, daß sämtliche Kräfte in der XY-Ebene wirken, die letzte wegfällt.

Sind diese Bedingungsgleichungen dagegen nicht erfüllt, so steht die im Angriffspunkte der Kräfte konzentriert gedachte Masse m, die wir dann als einen materiellen Punkt bezeichnen, unter der Wirkung der Resultanten Q, welche ihr nach Gl. (1) eine proportionale und gleichgerichtete Beschleunigung erteilt. Diese wiederum kann als die Resultante der Beschleunigungen der Einzelkräfte betrachtet und nach § 16 durch Zusammenfassung der gleichgerichteten Beschleunigungskomponenten berechnet werden, woraus die Unabhängigkeit der Wirkung der Einzelkräfte voneinander hervorgeht. Hört aus irgendeinem Grunde die Wirkung einer Einzelkraft auf, so folgt die Masse der Beschleunigung der Resultante aus allen übrigen Kräften, und bewegt sich, wenn die Wirkung aller Kräfte aufhört oder diese sich im Gleichgewichte befinden, beschleunigungsfrei, d. h. nach den Sätzen des § 16 geradlinig und gleichförmig mit der im Momente des Aufhörens der Kraftwirkung erreichten Geschwindigkeit weiter. Diese Eigenschaft der Masse, ihren Bewegungszustand nur unter der Einwirkung von Kräften zu ändern, ohne Kraftwirkung dagegen beizubehalten, nennen wir ihre Trägheit oder ihr Beharrungsvermögen.

In dem oben besprochenen Falle des Gleichgewichts von Kräften spielt die Masse gar keine Rolle, da sie nur als Faktor der hierbei verschwundenen Beschleunigung auftritt. Betrachtet man daher eine Kraft ohne Rücksicht auf die ihrer Wirkung unterworfene Masse, so verliert der Angriffspunkt seine Bedeutung, so daß die durch ihre Größe und Richtung bestimmte Kraft beliebig in ihrer Richtungsgeraden verschoben werden kann. So ändert sich der Gleichgewichtszustand (und die Lage) eines Bildes an der Wand nicht, wenn man es unmittelbar an einen Nagel hängt oder erst vermittelst eines Fadens an einem vertikal, d. i. in der Kraftrichtung darüber befindlichen Nagel befestigt bzw. durch einen darunter eingeschlagenen unmittelbar oder durch einen dazwischen geschalteten Stab stützt. Der Faden wird in diesem Falle durch das Gewicht des Bildes und die gleichgroße Gegenwirkung des Nagels gezogen, der Stab aber durch das Gewicht an einem Ende und die Gegenwirkung am andern gedrückt.

1. Beispiel. Durch die Entzündung der Pulverladung eines Geschützes wird nicht nur auf das Geschoß die beschleunigende Kraft Q, sondern auch auf das Geschütz selbst eine Gegenkraft $-Q$, der sog. Rückstoß, ausgeübt. Bezeichnen wir die Masse des Geschosses mit m_1, die des Geschützes mit m_2, die entsprechenden Beschleunigungen mit q_1 und q_2, so ist hiernach in jedem Augenblicke, so lange das Geschoß sich noch im Rohre befindet

$$Q = m_1 q_1 = -m_2 q_2$$

oder

$$m_1 q_1 + m_2 q_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Diesen Beschleunigungen entsprechen aber Geschwindigkeiten mit den Momentanwerten v_1 und v_2, so zwar daß nach (5)

$$m_1 \frac{dv_1}{dt} + m_2 \frac{dv_2}{dt} = 0$$

oder nach Wegheben der auf das Endergebnis einflußlosen Zeit

$$m_1 dv_1 + m_2 dv_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5a)$$

wird, woraus durch Integration bei anfänglichem Ruhezustande, d. h. mit den Anfangsgeschwindigkeiten $v_1 = v_2 = 0$ und den Endgeschwindigkeiten c_1 und c_2

$$m_1 c_1 + m_2 c_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5b)$$

folgt. Verläßt also das Geschoß das Rohr mit der Geschwindigkeit c_1 so hat auch das Geschütz durch die Gegenwirkung eine entgegengesetzt gerichtete Geschwindigkeit

$$c_2 = -\frac{m_1}{m_2} c_1$$

angenommen, vermöge deren es sich rückwärts bewegt. Diese Bewegung sucht man in der Artillerie durch Erdsporen, welche das Geschütz mit einer gewissen Bodenmasse verbinden und damit die Geschützmasse scheinbar vergrößern, möglichst herabzumindern.

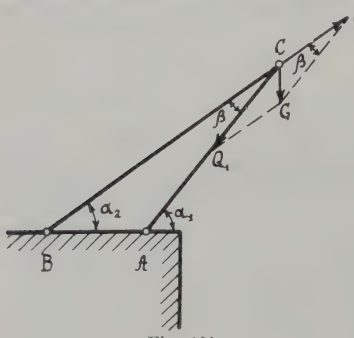

Fig. 101.

2. Beispiel. Zwei in A und B mit dem Boden gelenkig verbundene Stäbe (Fig. 101), die im Punkte C ebenfalls durch ein Gelenk zusammenlaufen, bilden ein einfaches ebenes Stabsystem oder Fachwerk, welches praktisch als Kran zum Tragen, bzw. Aufziehen von Lasten in C benutzt wird. Ist G eine solche Last in kg, so kann man diese, wie in der Figur angedeutet, nach der Parallelogrammregel in zwei Stabkräfte Q_1 und

Q_2 zerlegen, von denen die erstere offenbar den Stab AC gegen das Bodengelenk A drückt, während die Kraft Q_2 am Stabe BC bzw. dem Bodengelenke B zieht. Bezeichnen wir die Winkel der gewichtslos gedachten Stäbe mit α_1 und α_2, so erfordert das Gleichgewicht der Kräfte am Punkte C, daß

$$\left.\begin{aligned} Q_1 \sin\alpha_1 + Q_2 \sin\alpha_2 &= G \\ Q_2 \cos\alpha_1 + Q_2 \cos\alpha_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (6),$$

woraus

$$Q_1 = \frac{G\cos\alpha_2}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)},$$

$$Q_2 = \frac{G\cos\alpha_1}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)} = -\frac{G\cos\alpha_1}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)} \ldots\ldots \quad (6\,a)$$

hervorgeht. Dieses Ergebnis hätten wir mit $\alpha_1 - \alpha_2 = \beta$ auch unmittelbar aus dem Kräfteparallelogramm ableiten können.

Zerlegen wir anderseits die Stabkräfte Q_1 und Q_2 an den zugehörigen Bodengelenken in je eine horizontale und vertikale Komponente, so folgt schon aus der zweiten Gl. (6) die entgegengesetzte Gleichheit der beiden ersteren, so daß man auch die Gelenke A und B durch einen Stab verbinden kann, der durch eine Kraft $Q_3 = Q_1\cos\alpha_1 = -Q_2\cos\alpha_2$ zusammengedrückt wird. Alsdann braucht das ganze Stabdreieck ABC nur bei B im Boden gegen die Zugkraft $Q_2\sin\alpha_2$ verankert zu werden, während die Druckkraft $Q_1\sin\alpha_1$ bei A durch den Gegendruck des Bodens aufgehoben wird.

3. Beispiel. Die im vorigen Paragraph ermittelte Zentralbeschleunigung der Planeten gegen die Sonne können wir nunmehr als die Folge einer von der letzteren ausgeübten Anziehungskraft ansehen, welche für jeden Planeten dessen Masse proportional ist. Anderseits üben aber auch die Planeten selbst, wie aus der Gültigkeit der Keplerschen Gesetze für die sie umkreisenden Monde hervorgeht, eine Anziehungskraft aus, die sich naturgemäß auch auf die Sonne erstreckt. Die Sonne erfährt dann nach dem Satze der Wirkung und Gegenwirkung von seiten des Planeten dieselbe Anziehung wie diese von ihr.

Ist r der Abstand des Planeten mit der in einem Punkte konzentriert gedachten Masse m_1 von der Sonne mit der Masse m_0, so kann die Anziehungskraft der letzteren auf die Planeten mit einem konstanten Faktor k_1 in der Form

$$Q = k_1 \frac{m_1}{r^2}$$

geschrieben werden, während der Planet die Sonne mit der Kraft

$$Q = k_0 \frac{m_0}{r^2}$$

zu sich heranzieht. Daraus folgt aber $k_0 m_0 = k_1 m_1$, oder auch mit einer allgemein gültigen Konstanten f

$$k_0 = f m_1 \quad k_1 = f m_0,$$

und daher wird die wechselseitige Anziehungskraft, die sog. Gravitation

$$Q = f \frac{m_1 m_0}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7),$$

d. h. zwei punktförmige Massen ziehen sich nach dem Newtonschen Gesetze mit einer ihrem Produkte direkt und dem Quadrate ihres Abstandes indirekt proportionalen Kraft an. Der Faktor f der Gl. (7) heißt die Gravitationskonstante. Hiernach ist die Beschleunigung des Planeten gegen die Sonne

$$q_1 = \frac{Q}{m_1} = f \frac{m_0}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7a)$$

und die der Sonne gegen den Planeten

$$q_0 = \frac{Q}{m_0} = f \frac{m_1}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7b),$$

so daß sich beide gegeneinander mit einer resultierenden Beschleunigung

$$q = q_0 + q_1 = f \frac{m_0 + m_1}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7c)$$

bewegen. Infolge der Kleinheit der Planetenmasse m_1 gegen die Sonnenmasse m_0 (für die Erde 1 : 320 000) ist allerdings die Beschleunigung der letztern gegenüber derjenigen der Planeten fast verschwindend.

4. Beispiel. Die im vorigen Beispiel erwähnten Himmelskörper (Sonne, Planeten, Monde) sind nun in Wirklichkeit keine materiellen Punkte, sondern nahezu kugelförmige Massen, deren einzelne Bestandteile auf einen äußeren Massenpunkt Kräfte von der Form (7) ausüben, deren Zusammenfassung die Anziehungskraft der Kugel ergibt. Es handelt sich hierbei offenbar um die Summierung einer unendlichen Anzahl von Elementarwirkungen, die wir durch eine Integration vollziehen werden, und zwar zunächst unter der Voraussetzung der gleichmäßigen Ausbreitung der anziehenden Masse m auf eine Kugelfläche vom Radius a (Fig. 102). Alsdann verhält sich das auf einem Flächenelement dF befindliche Massenelement dm zur Gesamtmasse m, wie dF zur Kugelfläche $4\pi a^2$, so zwar, daß

$$dm = \frac{m}{4\pi a^2} dF \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

und die von diesem in A befindlichen Massenelement auf einen Massenpunkt m' in der Entfernung $AP = \varrho$ (Fig. 102) ausgeübte Anziehungskraft

$$dQ = f\frac{m'\,dm}{\varrho^2} = f\frac{m'm}{\varrho^2}\cdot\frac{dF}{4\pi a^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

ist. Bildet nun der Abstand ϱ mit der Zentrale $OP = r$ den Winkel φ, mit dem Radius $OA = a$ den Winkel ϑ, so ist die nach dem Kugelzentrum gerichtete Komponente $dR = dQ\cos\varphi$. Nun denken wir uns das Flächenelement dF ringförmig, d. h. durch Rotation des Bogenelements $AA' = ds$ um die Zentrale OP erzeugt. Hierbei beschreibt aber auch dessen Projektion $AA'' = ds\cos\vartheta = \varrho\,d\varphi$ auf eine Normale zu ϱ ein Ringflächenelement von der Größe $2\pi\varrho^2\sin\varphi\,d\varphi$, so daß wir auch haben

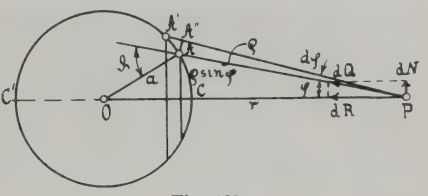

Fig. 102.

$$dF\cos\vartheta = 2\pi\varrho^2\sin\varphi\,d\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Dies liefert für die zentrale Anziehungskomponente

$$dR = dQ\cos\varphi = f\frac{m\,m'}{2a^2}\frac{\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi}{\cos\vartheta} = f\frac{m\,m'}{2a^2}\cdot\frac{\sin\varphi\cdot d(\sin\varphi)}{\cos\vartheta} \quad (9\,\mathrm{a}),$$

während die senkrecht dazu gerichtete Komponente dN infolge der Symmetrie um die Drehachse verschwindet. Nun ist aber anderseits in dem Dreieck OPA

$$a\sin\vartheta = r\sin\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11),$$

also

$$a\cos\vartheta\,d\vartheta = r\,d(\sin\varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11\,\mathrm{a}),$$

womit (9a) übergeht in

$$dR = f\frac{m\,m'}{2r^2}\sin\vartheta\,d\vartheta = -f\frac{m\,m'}{2r^2}\,d(\cos\vartheta) \quad . \quad . \quad . \quad (9\,\mathrm{b}).$$

Dieser Ausdruck ist zu integrieren, indem wir vom Punkte C auf der Zentralen nach dem Gegenpunkte C' fortschreiten, wobei der Winkel ϑ von 0 bis π wächst. Wir erhalten also

$$R = -f\frac{m\,m'}{2r^2}\int_0^{\pi} d(\cos\vartheta) = f\frac{m\,m'}{r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

d. h. die auf einer Kugelfläche gleichförmig ausgebreitete Masse wirkt auf einen äußeren Massenpunkt, als wenn sie im Kugelzentrum vereinigt wäre.

Da man sich nun jede Vollkugel (wie eine Zwiebel) aus lauter unendlich dünnen Kugelschalen zusammengesetzt denken kann, so

wirkt eine solche Kugel nach außen wie ihre im Zentrum vereinigte Gesamtmasse, wenn die Verteilung der Masse innerhalb der Kugel über jede konzentrische Schale eine gleichmäßig (homogene) oder mit andern Worten nur eine Funktion des Radius ist. Durch dieses Ergebnis wird gleichzeitig die frühere Behandlung zweier kugelförmiger Weltkörper als materielle Punkte gerechtfertigt.

5. Beispiel. Die obige Herleitung der elementaren Anziehungskraft (9b) einer auf einer Kugelfläche homogen verteilten Masse gilt auch noch für einen im Innern der Kugel befindlichen Punkt P, d. h. für $r < a$ (Fig. 103). Dagegen ist bei der Integration dieser Formel zu beachten, daß nunmehr für den Punkt C der Winkel $OAP = \vartheta$ ebenso verschwindet, wie für den Gegenpunkt C', so daß also für die resultierende Anziehungskraft der Kugelschale m auf die Masse m' in P

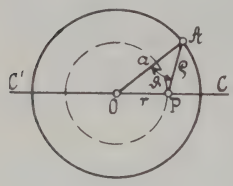

Fig. 103.

$$R = -f\frac{m\,m'}{2r^2}\int_0^0 d(\cos\vartheta) = 0 \quad . \quad (13),$$

d. h. die auf einer Kugelschale gleichmäßig ausgebreitete Masse übt auf einen im Innern befindlichen Punkt keine Anziehung aus. Dies gilt natürlich sofort auch für eine Hohlkugel, sofern nur in dieser die Massenverteilung lediglich eine Radialfunktion ist. Da ferner das Experiment lehrt, daß eine elektrisch geladene Kugel auf eine im Innern befindliche Elektrizitätsmenge keine Wirkung ausübt, so folgt umgekehrt, daß auch für die Anziehung (bzw. Abstoßung) der Elektrizitätsmengen das Newtonsche Gesetz gilt. Ist die Kugel ganz von der Masse erfüllt, so erfährt hiernach ein im Innern befindlicher Punkt von der Hohlkugel, deren Innenfläche durch ihn hindurchgeht, keine Wirkung. Es bleibt vielmehr nur die Anziehung der Kugel mit dem Radius r selbst übrig, deren Masse m'' sich zur Gesamtmasse m bei homogener Verteilung, wie die entsprechenden Volumina verhält, so zwar, daß

$$m'' = m\frac{r^3}{a^3}$$

ist. Mithin erfährt der Punkt P im Innern der Vollkugel eine gesamte Anziehungskraft

$$R = f\frac{m''m'}{r^2} = f\frac{m\,m'}{a^3}r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

mit einer Beschleunigung

$$q = \frac{R}{m'} = f\frac{m}{a^3}r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14a).$$

Übertragen wir dieses Ergebnis auf die als homogen betrachtete Erde, deren Beschleunigung an der Oberfläche, d. h. für $r = a$, g war, so ist

$$g = f \frac{m}{a^2}$$

oder mit (14a)

$$q = g \frac{r}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14b),$$

d. h. die Anziehung einer homogenen Kugel wächst im Innern bis zur Oberfläche proportional dem Radius, während sie außerhalb natürlich im umgekehrten Verhältnis mit dem Quadrate des Abstandes vom Kugelzentrum abnimmt. Somit stellt die Anziehungskraft und die Beschleunigung an der Kugeloberfläche selbst einen Maximalwert dar.

§ 19. Momente von Kräften, Kräftepaare und statische Momente.

Greifen an einer ebenen mit Masse gleichförmig oder ungleichförmig belegten Scheibe, deren Elemente gegeneinander nicht verschoben werden können, so daß das ganze Gebilde als starr zu betrachten ist, zwei Kräfte Q_1 und Q_2 an (Fig. 104), so können wir die Richtungslinien beider zum Schnitt bringen und ihren Schnittpunkt P als Angriffspunkt der Resultante ansehen. Sind α_1 und α_2 die Neigungswinkel der Kräfte gegen die X-Achse sowie l_1 und l_2 die Lote auf die Kraftrichtungen vom Anfang O aus, so erhalten wir durch Multiplikation der beiden Gleichungen der Richtungsgeraden Gl. (5) § 2

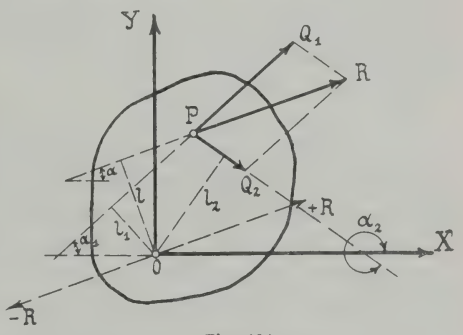

Fig. 104.

$$\left.\begin{aligned} y\cos\alpha_1 - x\sin\alpha_1 &= l_1 \\ y\cos\alpha_2 - x\sin\alpha_2 &= l_2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

mit Q_1 bzw. Q_2 und Addition, also

$$y(Q_1\cos\alpha_1 + Q_2\cos\alpha_2) - x(Q_1\sin\alpha_1 + Q_2\sin\alpha_2) = Q_1 l_1 + Q_2 l_2 \quad (1a).$$

Hierin sind also

$$\left.\begin{aligned} Q_1 \cos \alpha_1 &= X_1, \quad Q_2 \cos \alpha_2 = X_2 \\ Q_1 \sin \alpha_1 &= Y_1, \quad Q_2 \sin \alpha_2 = Y_2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

die Komponenten der beiden Kräfte und daher deren Summen

$$\left.\begin{aligned} Q_1 \cos \alpha_1 + Q_2 \cos \alpha_2 &= X_1 + X_2 = X = R \cos \alpha \\ Q_1 \sin \alpha_1 + Q_2 \sin \alpha_2 &= Y_1 + Y_2 = Y = R \sin \alpha \end{aligned}\right\} \quad . \quad (2\,a)$$

die Komponenten der Resultante R mit dem Richtungswinkel α. Damit lautet die Gl. (1 a)

$$y X - x Y = R (y \cos \alpha - x \sin \alpha) = Q_1 l_1 + Q_2 l_2 \quad . \quad (1\,b),$$

oder

$$y \cos \alpha - x \sin \alpha = \frac{Q_1 l_1 + Q_2 l_2}{R} = l \quad . \quad . \quad . \quad (1\,c)$$

und stellt die durch den Schnittpunkt P von Q_1 und Q_2 gehende Richtungsgerade der Resultante mit dem Lot l vom Anfang aus dar. Denken wir uns nun die Scheibe um den festgehaltenen Anfangspunkt O drehbar, so verschwindet die Wirkung der Kräfte Q_1 und Q_2, wenn die Resultante mit $l = 0$ durch den Drehpunkt hindurchgeht, d. h. wenn

$$Q_1 l_1 + Q_2 l_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Hierin bedeuten aber die Produkte aus den Kräften mit ihren als Hebelarme bezeichneten Loten vom Drehpunkt, aus die sog. Momente der Kräfte, die halben Flächen der Dreiecke OPQ_1 und OPQ_2, die somit im Falle der Wirkungslosigkeit der Kräfte einander entgegengesetzt gleich sind, d. h. nach § 2 Gl. (9) beim Fortschreiten in der Kraftrichtung in entgegengesetztem Drehungssinne umfahren werden. Sind mehr als zwei sich nicht in einem Punkte schneidende Kräfte vorhanden, so brauchen wir nur erst zwei zu einer Resultante zusammenzuziehen, dann diese mit der dritten Kraft zum Schnitte zu bringen und die neue Resultante zu bilden usw. Analytisch erhalten wir dann ebensoviel Gleichungen (1) der Richtungsgeraden, wie Einzelkräfte, ohne daß sich an dem obigen Rechnungsgange etwas ändert. Wir erhalten daher als allgemeines Ergebnis für die Resultante R beliebig vieler Kräfte

$$R l = Q_1 l_1 + Q_2 l_2 + Q_3 l_3 + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

also den Ersatz der Wirkung beliebig vieler Einzelkräfte an einem um einen festen Punkt drehbaren

ebenen System durch das Moment der Resultanten. Insbesondere geht darin der wohl auch als das Hebelgesetz bekannte Satz hervor, daß man in bezug auf den Drehpunkt jede Kraft durch eine andere von verschiedener Größe und Lage ersetzen kann, wenn nur ihre Momente in bezug auf den Drehpunkt übereinstimmen. Befindet sich das System unter der Wirkung beliebiger Kräfte im Gleichgewichte, so verschwindet nicht nur das Moment (4) der Resultante, sondern es wird auch diese selbst durch die Gegenwirkung am Drehpunkte aufgehoben.

Für parallele Kräfte versagt scheinbar die graphische Zusammenfassung zu einer Resultanten, da die Schnittpunkte ins Unendliche fallen. Fügt man jedoch z. B. im Falle zweier Parallelkräfte Q_1 und Q_2 (Fig. 105) auf der Geraden P_1P_2 zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte $\pm N$ hinzu, so schneiden sich die Resultanten R_1 und R_2 im Punkte P, durch den auch die Resultante $Q_1 + Q_2$ der Parallelkräfte hindurchgeht. Aus der Ähnlichkeit der in Fig. 105 gleichartig schraffierten Dreiecke folgt dann mit $AP_1 = a$, $AP_2 = b$, $AP = c$

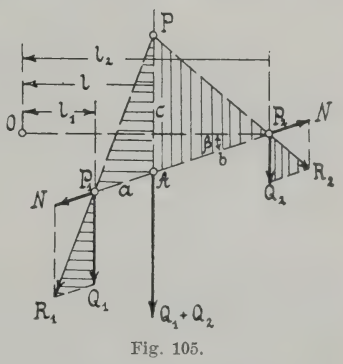

Fig. 105.

$$\frac{Q_1}{N} = \frac{c}{a}, \quad \frac{Q_2}{N} = \frac{c}{b}$$

oder

$$Q_1 a = Q_2 b \quad . \quad . \quad (5).$$

Bezeichnen wir weiter die Lote von irgendeinem Punkte O auf die Kräfte Q_1 und Q_2 und die Resultante $R = Q_1 + Q_2$ mit $l_1 l_2$ und l, so ist mit einem Neigungswinkel β der Linie P_1P_2 gegen diese Lote

$$a \cos\beta = l - l_1, \quad b \cos\beta = l_2 - l,$$

womit (5) unter Wegfall von $\cos\beta$ übergeht in

$$Q_1 (l - l_1) = Q_2 (l_2 - l)$$

oder

$$Q_1 l_1 + Q_2 l_2 = (Q_1 + Q_2) l = Rl \quad . \quad . \quad . \quad (5\,a).$$

Dies Ergebnis ist aber identisch mit Gl. (1c), so daß sich die

analytische Methode ohne weiteres auf Parallelkräfte anwendbar erweist. Sind die beiden Kräfte einander entgegengesetzt gleich, also $Q_1 = -Q_2$, so führt auch die Konstruktion Fig. 102 nicht zu einem Schnittpunkte P. In diesem Falle eines Kräftepaares heben sich nach (2a) die Komponenten der Einzelkräfte gegenseitig auf, und damit verschwindet die Resultante R, während ihr Hebelarm l nach (1c) bzw. (5a) unendlich groß wird.

Das Moment dieses Kräftepaares (Fig. 106)

$$M = Rl = Q_1 l_1 + Q_2 l_2 = Q_2 (l_2 - l_1) = Q_2 h \quad . \quad (5b)$$

bleibt dagegen endlich und unabhängig von der Richtung der Einzelkräfte mit dem hierbei als Hebelarm des Kräftepaares bezeichneten Abstand h. Ein solches Kräftepaar mit dem Momente Rl entsteht auch, wenn wir im Falle der Fig. 104 am Punkte O zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte $\pm R$ parallel der Resultanten anbringen, von denen die Kraft $+R$ vom festen Drehpunkte O aufgenommen wird, während $-R$ mit der in P angreifenden Resultanten ein Kräftepaar bildet. Durch Parallelverschiebung einer Kraft wird daher ein Kräftepaar geweckt, dessen Moment das Produkt dieser Kraft mit dem Abstand der Parallelen ist. Somit reduziert sich die Wirkung beliebig vieler Kräfte schließlich auf eine Resultante im Koordinatenanfang und ein Kräftepaar, dessen Moment mit dem der Resultante in ihrer ursprünglichen Lage in bezug auf den Anfang übereinstimmt. Sind von vornherein mehrere Kräftepaare $\pm Q_1$, $\pm Q_2$ . . . mit beliebigen Kraftrichtungen $\alpha_1 \alpha_2$ . . vorhanden, so kann man die positiven und negativen Kräfte nach dem eingangs erläuterten Verfahren graphisch oder rechnerisch zu je einer Resultante $\pm R$ zusammenfassen, die wiederum ein Kräftepaar bilden, dessen Moment die Summe der Momente der Einzelpaare ist.

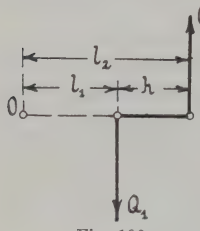

Fig. 106.

Wir kehren nun noch einmal zu dem Falle zweier beliebiger Parallelkräfte Q_1 und Q_2 zurück, deren gemeinsamer Neigungswinkel gegen die X-Achse α sein möge, während ihre An-

griffspunkte an der Scheibe (Fig. 107) die Koordinaten $x_1 y_1$ bzw. $x_2 y_2$ besitzen. Dann sind nach (1) die Lote vom Anfang auf die Kräfte

$$y_1 \cos\alpha - x_1 \sin\alpha = l_1$$
$$y_2 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha = l_2,$$

und daraus folgt nach Multiplikation mit Q_1 bzw. Q_2 und Addition das Moment der Resultante R

$$(Q_1 y_1 + Q_2 y_2)\cos\alpha - (Q_1 x_1 + Q_2 x_2)\sin\alpha = Q_1 l_1 + Q_2 l_2 \quad (6).$$

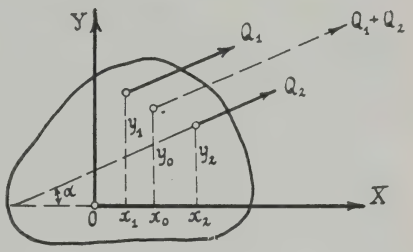

Fig. 107.

Anderseits liefert aber auch (1 c) mit $R = Q_1 + Q_2$

$$(Q_1 + Q_2)(y\cos\alpha - x\sin\alpha) = Q_1 l_1 + Q_2 l_2 \quad . \quad (6\,a)$$

die Gleichung der Resultante selbst. Ziehen wir diesen Ausdruck von (6) ab, so bleibt

$$[Q_1 y_1 + Q_2 y_2 - (Q_1 + Q_2) y]\cos\alpha$$
$$= [Q_1 x_1 + Q_2 x_2 - (Q_1 + Q_2) x]\sin\alpha \quad . \quad . \quad . \quad (6\,b)$$

eine Gleichung, die offenbar für alle möglichen Richtungen α aller noch unveränderten Einzelkräfte erfüllt ist, wenn die beiden Klammern für sich verschwinden, d. h. wenn die Resultante stets durch den Punkt

$$x_0 = \frac{Q_1 x_1 + Q_2 x_2}{Q_1 + Q_2}, \quad y_0 = \frac{Q_1 y_1 + Q_2 y_2}{Q_1 + Q_2} \quad . \quad . \quad (7)$$

hindurchgeht, den wir den Mittelpunkt der Parallelkräfte nennen wollen. In diesem Punkte schneiden sich nämlich alle Resultanten für die verschiedenen Richtungen α. Dehnen wir diese Überlegung auf beliebig viele Kräfte mit ebensoviel Angriffspunkten aus, so tritt an Stelle von (7)

$$x_0 = \frac{\Sigma Q x}{\Sigma Q}, \quad y_0 = \frac{\Sigma Q y}{\Sigma Q} \quad . \quad . \quad . \quad (7\,a).$$

Befinden sich nun in den einzelnen Punkten $x_1 y_1$, $x_2 y_2 \ldots$ die Massen m_1, $m_2 \ldots$, so können wir sie als Angriffspunkte der parallelen Gewichte $Q_1 = m_1 g$, $Q_2 = m_2 g$ usw. ansehen und erhalten auf diese Weise unter Wegheben des gemeinsamen Faktors g im Zähler und Nenner von (7 a) für den Mittelpunkt der

Schwerkraft oder kurz den Schwerpunkt des Systems die Koordinaten

$$x_0 = \frac{\Sigma m x}{\Sigma m}, \quad y_0 = \frac{\Sigma m y}{\Sigma m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7\,b).$$

Diesen Schwerpunkt hat man sonach als den von der Lage unabhängigen Angriffspunkt des Gesamtgewichts des Systems zu betrachten. Die in Gl. (7 b) auftretenden Produkte mx bzw. my bezeichnet man auch als Massenmomente oder statische Momente der Einzelmassen in bezug auf die Y- und X-Achse, während $x_0 \Sigma m$ und $y_0 \Sigma m$ die entsprechenden statischen Momente des ganzen Systems bedeuten. Verlegen wir dann den Koordinatenanfang in den Schwerpunkt selbst, setzen also $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, so wird auch

$$\Sigma m x = 0, \quad \Sigma m y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7\,c),$$

d. h. in bezug auf durch den Schwerpunkt gehende sog. Schwerpunktsachsen verschwinden die statischen Momente eines Massensystems und mit ihnen das Moment der Schwerkraft. Zur Bestimmung des Schwerpunktes eines beliebig gestalteten ebenen Systems braucht man demnach dieses nur an zwei verschiedenen Punkten aufzuhängen und in beiden Lagen Vertikale durch die Aufhängepunkte zu ziehen, die sich im gesuchten Schwerpunkte schneiden werden.

Im Falle einer kontinuierlichen (stetigen) Massenverteilung kommt jedem Punkte nur ein Massenelement dm zu, und dementsprechend ist in den Formeln (7 b) das Summenzeichen durch das Integral zu ersetzen, so zwar, daß unter m jetzt die Gesamtmasse verstanden, die Schwerpunktskoordinaten $x_0 y_0$ sich aus

$$x_0 m = \int x dm, \quad y_0 m = \int y dm \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

berechnen. Wir können uns nun auch die Masse längs einer Linie oder auf einer Fläche gleichmäßig ausgebreitet denken und erhalten dann mit der Masse λ auf der Längeneinheit der Linie s für das Massenelement $dm = \lambda ds$ und daher an Stelle von (8)

$$x_0 \lambda s = \int \lambda x ds = \lambda \int x ds; \quad y_0 \lambda s = \int \lambda y ds = \lambda \int y ds$$

oder nach Wegfall des konstanten Faktors λ für die statischen Momente der Linie s

$$x_0 s = \int x ds, \quad y_0 s = \int y ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8\,a).$$

In derselben Weise folgt auch mit einer Massenbelegung μ auf

die Flächeneinheit $dm = \mu dF$ und daraus die statischen Momente einer Fläche F

$$x_0 F = \int x\,dF, \quad y_0 F = \int y\,dF \quad . \quad . \quad . \quad (8b)$$

und durch Ausdehnung derselben Überlegungen auf einen Körper vom Volumen V in bezug auf die drei Ebenen eines räumlichen Koordinatensystems

$$x_0 V = \int x\,dV, \quad y_0 V = \int y\,dV, \quad z_0 V = \int z\,dV \quad . \quad (8c).$$

1. Beispiel. Ein auf zwei Stützen A und B im Abstande l ruhender Balken (Fig. 108) werde in der Entfernung a von der Stütze A durch ein Gewicht G belastet, das wir uns etwa als eine Walze denken können, während wir das Eigengewicht des Balkens zunächst vernachlässigen wollen. Alsdann befindet sich das System im Gleichgewichte, indem der Kraft G an den Stützen zwei sog. Stützendrücke Q_1 und Q_2 entgegenwirken, so zwar, daß

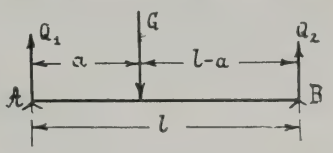

Fig. 108.

$$Q_1 + Q_2 = G$$

ist. Denken wir uns jetzt den Stab bei A drehbar, während die Stütze B entfernt und durch die Kraft Q_2 ersetzt wird, so müssen die Momente der Kräfte G und Q_2 in bezug auf A einander aufheben, also

$$Q_2 l = G a$$

sein. Daraus ergeben sich dann im Verein mit der ersten Formel die beiden Stützdrucke zu

$$Q_1 = G\frac{l-a}{l}, \quad Q_2 = G\frac{a}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Besitzt der Balken noch ein Eigengewicht G_0, welches sich auf die ganze Länge (konstanter Querschnitt und homogenes Material vorausgesetzt) gleichmäßig verteilt, so kommt hiervon auf jede Stütze noch $\frac{1}{2} G_0$, um welchen Betrag sich die Stützendrücke (9) vergrößern.

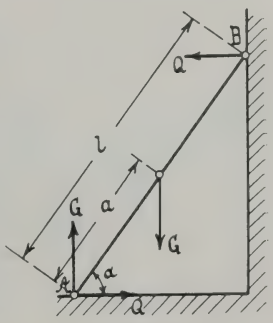

Fig. 109.

2. Beispiel. Auf einer unter dem Winkel α gegen den Horizont an die Wand gelehnten Leiter (Fig. 109) von der Länge $AB = l$, deren Eigengewicht zunächst vernachlässigt werde, befindet sich ein Mann vom Gewichte G im Abstande a von A. Denken wir uns die Leiter drehbar um den Punkt A, so wird die Wand bei B durch einen hori-

zontalen Stützendruck Q ersetzt werden können, während dem Gewicht G ein vertikaler Stützendruck von gleicher Größe in A entgegenwirkt. Der Stützendruck Q muß indessen, damit das System in horizontaler Richtung im Gleichgewichte verharrt, noch in A durch eine gleich große Gegenkraft aufgehoben werden, welche mit G zusammen dort eine Resultante $R = \sqrt{G^2 + Q^2}$ ergibt. Zur Berechnung von Q bedienen wir uns des Satzes der Gleichheit der Momente von Q und G in bezug auf den Drehpunkt A

$$Q\,l \sin\alpha = G\,a \cos\alpha,$$

woraus

$$Q = G\,\frac{a}{l}\,\operatorname{cotg}\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

und für die Resultante in A

$$R = G\sqrt{1 + \frac{a^2}{l^2}\operatorname{cotg}^2\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10\,a)$$

hervorgeht. Man übersieht leicht, daß diese Resultante nicht in die Richtung AB fällt, und daß die Komponente Q in A durch einen Vorsprung im Boden oder ein Gelenk aufgenommen werden muß, damit die Leiter nicht abgleitet. Die Hinzunahme des Eigengewichtes G_0 der Leiter, welche wir uns bei gleicher Verteilung über die ganze Länge in deren Mitte angreifend denken können, möge dem Leser überlassen bleiben.

3. Beispiel. Ein an den Punkten A_0 und B aufgehängtes Seil (Fig. 110) werde durch die Gewichte $Q_1 Q_2 Q_3$ in den sog. Knotenpunkten $C_1 C_2 C_3$ belastet; dann befindet sich jedes dieser Gewichte mit den beiden am gleichen Knotenpunkt angreifenden Seilspannungen S im Gleichgewicht. Diese drei Kräfte bilden mithin für jeden Knotenpunkt ein Dreieck, an das infolge der Zugehörigkeit einer Seilspannung zu zwei Knotenpunkten das nächste usw. angeschlossen werden kann. Auf diese Weise ergibt sich das Kräftepolygon mit dem Pol O (Fig. 110a), in dem die mit S bezeichneten Strecken den gleichbezeichneten im sog. Seilpolygon (Fig. 110) parallel gezogen sind. Aus dem Kräftepolygon, in dem die Lasten $Q_1 Q_2 Q_3$ sich einfach

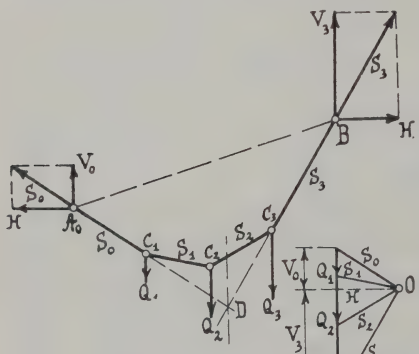

Fig. 110.

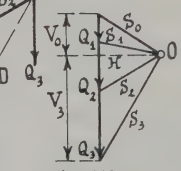

Fig. 110a.

aneinanderreihen, erhellt weiter, daß alle Seilspannungen S dieselbe punktierte Horizontalprojektion H besitzen, deren Fußpunkt in Fig. 110a die Linie $Q_1 + Q_2 + Q_3$ in die beiden Teile V_0 und V_3, die Vertikalprojektionen der letzten Seil- oder Schlußspannungen S_0 und S_3 in A und B zerlegt. Da diese beiden Spannungen ersichtlich den Lasten Q das Gleichgewicht halten, so wird die Vertikale durch ihren Schnittpunkt D die Richtungslinie der Resultanten $R = Q_1 + Q_2 + Q_3 = V_0 + V_3$ festlegen.

4. Beispiel. Die Konstanz der Horizontalspannung H eines Seiles bleibt offenbar auch noch erhalten, wenn die gesamte vertikale Seilbelastung Q stetig über den ganzen Horizontalabstand der Aufhängepunkte A und B, die sog. Spannweite (Fig. 111) verteilt ist, wobei die Vertikale im Kräftepolygon (Fig. 111a) nur in

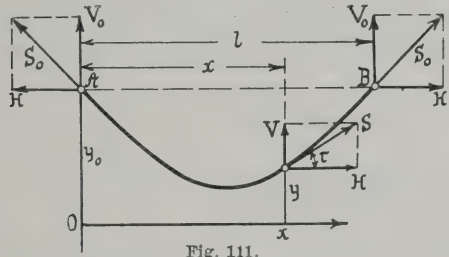

Fig. 111.

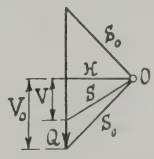

Fig. 111a.

unendlich viele Elemente zerfällt. Ist τ in diesem Falle der Neigungswinkel des Seiles gegen den Horizont an irgendeiner Stelle mit der Abszisse x und der Ordinate y, so folgt die dort herrschende Seilspannnung S sofort aus dem Kräftepolygon als Parallele zur Seiltangente durch den Pol O, so zwar, daß mit der Vertikalkomponente V von S

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{V}{H} = \frac{dy}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

ist, wenn wir in Fig. 111 den Koordinatenanfang O vertikal unter A verlegen. Setzen wir nunmehr eine gleichförmige Belastung über die ganze Spannweite l voraus, so trifft auf die Längeneinheit die Last $\frac{Q}{l}$, mithin auf den Abstand x die Last $\frac{Q}{l}x$, so daß also der Zuwachs der Vertikalspannung beim Fortschreiten um dx

$$dV = \frac{Q}{l}\,dx$$

und daraus durch Integration

$$V = \frac{Q}{l}\,x + V_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

wird. Die Konstante V_0 stellt hierin für $x = 0$ die Vertikalspannung V im Endpunkte A dar. Setzen wir diesen Ausdruck in (11) ein, so wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{H}\frac{x}{l} + \frac{V_0}{H} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11a),$$

oder integriert mit einer Konstanten y_0

$$y = \frac{Qx^2}{2Hl} + \frac{V_0}{H}x + y_0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13),$$

worin $y = y_0$ für $x = 0$ wird, so daß y_0 die Ordinate des Punktes A bedeutet. Unser Ergebnis stellt daher die Gleichung einer Parabel dar, in der somit das über die ganze Spannweite gleichförmig belastete Seil herabhängt. Liegen A und B auf gleicher Höhe, so liegt die Parabel symmetrisch zur mittleren Normalen von AB, und die beiden Vertikalspannungen an den Endpunkten werden einander gleich, nämlich

$$V_0 = -\frac{Q}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13a),$$

während die Spannung im tiefsten Punkte, dem Parabelscheitel stets mit der Horizontalspannung H übereinstimmt.

Die vorstehende Entwicklung gilt auch noch angenähert für flach durchhängende Seile, welche nur durch ihr über die Bogenlänge gleichförmig verteiltes Gewicht belastet sind, wie z. B. Telegraphendrähte, weil in diesem Falle die Bogenlänge sich nur wenig von der Abszisse unterscheidet (vergl. § 12, Beispiel 10).

5. Beispiel. Besitzt ein geometrisches Gebilde eine Symmetrieachse, so wird in bezug auf diese das statische Moment verschwinden, da in den Ausdrücken

$$\int x\,ds, \quad \int x\,dF, \quad \int x\,dV,$$

jedem Elemente ds, dF, dV mit positivem Abstand von der Symmetrieachse ein kongruentes mit negativem Abstand entspricht, so daß sich bei der Summierung bzw. Integration zwei Elemente $\pm x\,ds$, $\pm x\,dF$, $\pm x\,dV$ aufheben. Daraus geht dann hervor, daß der Schwerpunkt selbst auf der Symmetrieachse liegt, bzw. daß diese eine Schwerachse bildet. Die Schwerpunktsbestimmung reduziert sich in solchen Fällen einfach auf die Ermittlung seiner Lage auf der Symmetrieachse. So liegt der Schwerpunkt einer geraden Strecke in ihrer Mitte, der eines Rechteckes und einer Ellipse mit zwei Symmetrieachsen in deren als Mittelpunkt bezeichneten Schnitte usf.

Für ein gleichschenkliges Dreieck (Fig. 112) mit der Basis a und der Höhe h erhält man in bezug auf eine Parallele durch die Spitze zur Basis $dF = x\,dy$ und wegen $x : a = y : h$ und $F = \frac{1}{2}\,a\,h$

$$y_0 F = y_0 \frac{a h}{2} = \int_0^h y\,dF$$

$$= \frac{a}{h}\int_0^h y^2 dy = \frac{a h^2}{3}$$

oder

$$y_0 = \frac{2}{3}\,h \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

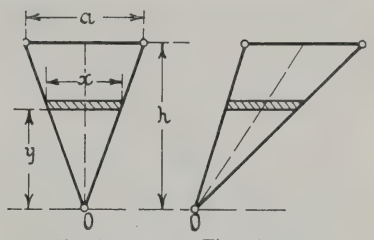

Fig. 112 Fig. 112a.

Dies gilt auch noch für das schiefe Dreieck (Fig. 112a), in dem der Schwerpunkt auf der punktierten Halbierungslinie liegen muß, da jedem Elemente des schraffierten Flächenstreifens ein gleichgroßes auf der andern Seite der Halbierungslinie entspricht.

Für einen Kreisbogen (Fig. 113) von der halben Öffnung φ_0 ist die ganze Bogenlänge $s = 2\,r\,\varphi_0$ und $ds = r\,d\varphi$, also

$$y_0 s = 2\,y_0 r\,\varphi_0 = \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} y\,ds = r^2 \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \cos\varphi\,d\varphi = 2\,r^2 \sin\varphi_0$$

oder

$$y_0 = \frac{r \sin\varphi_0}{\varphi_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15),$$

d. h. der Schwerpunktabstand eines Kreisbogens vom Mittelpunkte verhält sich zum Radius wie die Sehne AB zum Bogen.

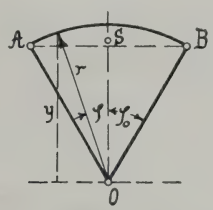

Fig. 113.

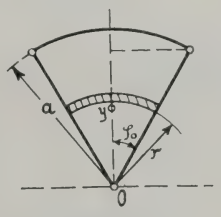

Fig. 114.

Multiplizieren wir dann den ermittelten Schwerpunktabstand des Kreisbogens mit dem schraffierten Flächenelement $dF = 2\,\varphi_0\,r\,dr$ des Sektors vom Radius a (Fig. 114), so ergibt sich als dessen statisches Moment

$$y_1 a^2 \varphi_0 = \int_0^a \frac{r \sin\varphi_0}{\varphi_0}\,2\,r\,\varphi_0\,dr = 2 \sin\varphi_0 \int_0^a r^2 dr = \frac{2}{3}\,a^3 \sin\varphi_0$$

oder

$$y_1 = \frac{2}{3}\,a\,\frac{\sin\varphi_0}{\varphi_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Für $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ wird aus (15) für den Halbkreisbogen

$$y_0 = \frac{2r}{\pi} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15a)$$

und nach (16) die Halbkreisfläche

$$y_1 = \frac{4}{3}\frac{a}{\pi} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16a).$$

§ 20. Die Bewegung starrer Körper.

Da die einzelnen Teile eines festen Körpers unter dem Einfluß äußerer Kräfte nicht ohne weiteres voneinander zu trennen sind, so müssen wir schließen, daß sie durch sog. innere Kräfte zusammengehalten werden, welche in die Richtung der Verbindungslinie je zweier Massenelemente fallen und nach dem Satze von Wirkung und Gegenwirkung einander entgegengesetzt gleich sein müssen. Daher kommen diese inneren Kräfte eines festen Körpers, obwohl sie ihrer Größe nach durch die äußeren Kräfte bedingt sind, nach außen hin gar nicht zur Geltung, weshalb man sie wohl auch nach dem Vorgange von D'Alembert als verlorene Kräfte bezeichnet. Dies tritt am klarsten hervor an zwei miteinander durch eine starre Gerade verbundenen Massenpunkten m_1 und m_2 (Fig. 115), welche den einfachsten Fall eines starren Körpers darstellen. Bezeichnen wir die augenblicklichen Koordinaten der Massenpunkte mit $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, die Komponenten der an ihnen angreifenden äußeren Kräfte Q_1 und Q_2 mit $X_1 Y_1$ bzw. $X_2 Y_2$ und die in die Verbindungsgerade mit der Neigung α gegen die X-Achse fallende innere Kraft mit Q', welche die Verbindung geradezu ersetzt, so erhalten wir zunächst für die Masse m_1 die Bewegungsgleichungen

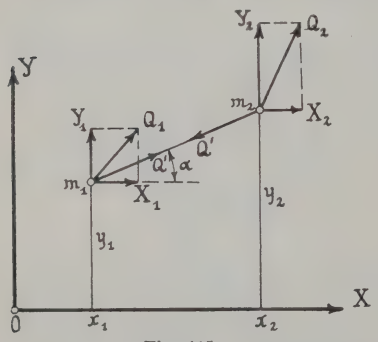

Fig. 115.

$$X_1 + Q' \cos\alpha = m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2}, \quad Y_1 + Q' \sin\alpha = m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} \quad (1),$$

während für die Masse m_2 mit entgegengesetztem Q'

$$X_2 - Q' \cos \alpha = m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2}, \quad Y_2 - Q' \sin \alpha = m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} \quad (1\,a)$$

gilt. Durch Addition der gleichgerichteten Komponenten wird daraus unter Wegfall der inneren Kraft

$$\left.\begin{aligned} X_1 + X_2 &= m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} \\ Y_1 + Y_2 &= m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Sind mehr als zwei solcher Massenpunkte vorhanden, so können wir für jeden derselben wieder die Bewegungsgleichungen anschreiben, in denen dann ebensoviel innere Kräfte wie Verbindungsgerade vorkommen, die sich dann in gleicher Weise bei der Addition aller gleichgerichteten Komponenten aufheben, so daß man auch für ein beliebiges ebenes Massensystem allgemein schreiben darf

$$\Sigma X = \Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad \Sigma Y = \Sigma m \frac{d^2 y}{dt^2} \quad . \quad . \quad . \quad (2\,a).$$

Hierin sind aber ΣX und ΣY nichts anderes als die Komponenten der Resultante R aller an dem Massensystem angreifenden Kräfte. Führen wir nun noch den Schwerpunkt des Systems ein, dessen bei der Bewegung veränderliche Koordinaten $x_0 y_0$ durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x_0 \Sigma m &= x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots = \Sigma x m \\ y_0 \Sigma m &= y_1 m_1 + y_2 m_2 + \ldots = \Sigma y m \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (3)$$

gegeben sind, so erhalten wir auch durch zweimalige Differentiation

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 x_0}{dt^2} \Sigma m &= m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \ldots = \Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2} \\ \frac{d^2 y_0}{dt^2} \Sigma m &= m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} + \ldots = \Sigma m \frac{d^2 y}{dt^2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (3\,a),$$

oder eingesetzt in (2 a)

$$\Sigma X = \frac{d^2 x_0}{dt^2} \Sigma m, \quad \Sigma Y = \frac{d^2 y_0}{dt^2} \Sigma m \quad . \quad . \quad . \quad (2\,b),$$

d. h. der Schwerpunkt eines beliebigen Massensystems bewegt sich gerade so, als wenn die Resultante aller äußeren Kräfte auf die in ihm vereinigte Gesamtmasse wirkt.

Da nun die Resultante von vornherein weder durch den Koordinatenanfang noch durch den Schwerpunkt zu gehen braucht, so wird durch ihre Parallelverschiebung in die Schwerachse ein Kräftepaar geweckt, dessen Wirkung auf das System wir noch festzustellen haben. Das Moment dieses Kräftepaares ist identisch mit dem Moment der Resultanten, welches wir nach den Lehren des letzten Paragraphen durch algebraische Summierung der Momente der Einzelkräfte bzw. der Momente ihrer Komponenten erhalten. Multiplizieren wir demgemäß für den Fall der Fig. 115 die erste Gl. (1) mit dem Hebelarm y_1, die zweite mit x_1 und ziehen von ihr die erste ab, so folgt

$$Y_1 x_1 - X_1 y_1 + Q'(x_1 \sin\alpha - y_1 \cos\alpha) = m_1 \left(x_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} - y_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} \right) \quad (4).$$

Verfahren wir ebenso mit der Gl. (1a), so erhalten wir

$$Y_2 x_2 - X_2 y_2 - Q'(x_2 \sin\alpha - y_2 \cos\alpha) = m_2 \left(x_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} - y_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} \right) \quad (4a)$$

und durch Addition zu (4) mit Rücksicht auf

$$(x_2 - x_1) \sin\alpha = (y_2 - y_1) \cos\alpha$$

unter Wegfall der mit den inneren Kräften Q' behafteten Glieder

$$(Y_1 x_1 - X_1 y_1) + (Y_2 x_2 - X_2 y_2) = m_1 \left(x_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} - y_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} \right) + m_2 \left(x_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} - y_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Bei der Ausdehnung dieser Überlegung auf beliebige miteinander zusammenhängende Massenpunkte fallen ebenfalls die inneren Kräfte heraus und wir erhalten allgemein

$$\Sigma(Yx - Xy) = \Sigma m \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \quad . \quad . \quad (5a)$$

als Momentengleichung, die mit den Formeln (2a) bzw. (2b) zusammen die Bewegung eines ebenen Massensystems bestimmt. Hierin bedeuten x und y die veränderlichen Koordinaten je eines Massenpunktes, der zugleich Angriffspunkt einer äußeren Kraft sein kann, aber nicht sein muß. Diese Koordinaten beziehen sich auf ein ganz willkürliches Achsenkreuz, dessen Anfang wir ebensogut wenigstens für einen Augenblick in den

Schwerpunkt S des Systems verlegen dürfen (Fig. 116), wodurch xy Koordinaten in bezug auf zwei zueinander normale Schwerachsen werden. Bezeichnen wir ferner mit v_x und v_y, wie früher die Geschwindigkeitskomponenten eines Massenpunktes mit dem Fahrstrahl r vom Anfang, der mit der X-Achse den Winkel φ bildet, so erhalten wir zunächst

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)$$
$$= \frac{d}{dt}(xv_y - yv_x)$$

oder wegen Gl. (6 b) § 17

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right) \quad (6).$$

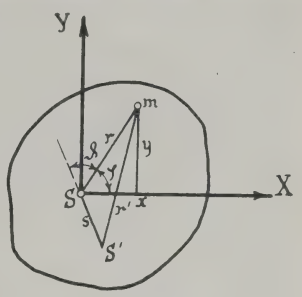

Fig. 116.

Damit aber geht die Gleichung (5 a) für das Moment $M = \Sigma(Yx - Xy)$ über in

$$M = \Sigma m\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6\,a),$$

das, wie wir gesehen haben, auch noch gilt, wenn der Anfang mit dem Schwerpunkt zusammenfällt, womit r den Schwerpunktsabstand eines Massenpunktes bezeichnet. Ist insbesondere unser Massensystem starr, so bleibt die gegenseitige Lage seiner Punkte untereinander, sowie gegen den Schwerpunkt bei der Bewegung ungeändert, d. h. r ist unabhängig von der Zeit. Anderseits aber erfährt in diesem Falle jeder Fahrstrahl r eines Massenpunktes dieselbe Änderung des Drehwinkels φ, so daß sowohl die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$, als auch die sog. Winkelbeschleunigung $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ allen Bestandteilen des starren Systems gemeinsam ist und daher in Gl. (6 a) vor das Summenzeichen gesetzt werden darf. Die Gleichung (6 a) geht damit über in

$$M = \frac{d^2\varphi}{dt^2}\Sigma mr^2 = \Theta\frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6\,b),$$

worin wir den Ausdruck

$$\Theta = \Sigma mr^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

als das polare Trägheitsmoment des starren Körpers in bezug auf seinen Schwerpunkt bezeichnen. Die

äußeren Kräfte rufen demnach an einem Massensystem außer der Beschleunigung des Schwerpunktes durch die dorthin verschobene Resultante, infolge des Auftretens eines Kräftepaares noch eine dessen Moment proportionale Winkelbeschleunigung um den Schwerpunkt hervor.

Bemerkenswert ist der analoge Bau der Formel (6b) zur einfachen Beziehung $Q = mq$ zwischen der Kraft Q, der Masse m und der Beschleunigung q, denen in der Momentengleichung das Moment M, das Trägheitsmoment Θ und die Winkelbeschleunigung $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ entsprechen. An Stelle des Trägheitsmomentes kann man auch unter Einführung einer Länge k

$$\Theta = \Sigma m r^2 = k^2 \Sigma m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7a)$$

setzen, d. h. sich die Gesamtmasse auf einen Kreis vom Radius k um den Schwerpunkt gleichförmig verteilt denken, weshalb man k auch als den Trägheitshalbmesser in bezug auf den Schwerpunkt bezeichnet.

Da die vorstehenden Überlegungen nur die starre Verbindung des Bezugspunktes mit den Massenpunkten des Systems voraussetzen, so gelten sie offenbar auch für jeden diese Bedingung erfüllenden Punkt S', dessen Abstand vom Schwerpunkt s sein möge. Auf diesen neuen Punkt ist natürlich dann auch das Moment M' der Resultante, wie auch das polare Trägheitsmoment $\Theta' = \Sigma m r'^2$ zu beziehen, worin r' den unveränderlichen Abstand eines Massenpunktes von S' bedeutet. Da nun in Fig. 116 mit dem Neigungswinkel ϑ zwischen s und r

$$r'^2 = r^2 + s^2 + 2\,s\,r\cos\vartheta,$$

so folgt auch

$$\Sigma m r'^2 = \Sigma m r^2 + s^2 \Sigma m + 2\,s\,\Sigma m\,r\cos\vartheta.$$

Hierin ist aber $r\cos\vartheta$ der Abstand des Massenpunktes m von der zum Abstand s senkrechten Schwerachse durch S; daher verschwindet $\Sigma m r\cos\vartheta$ als statisches Moment in bezug auf eine Schwerachse und es bleibt

$$\Sigma m r'^2 = \Sigma m r^2 + s^2 \Sigma m$$

oder

$$\Theta' = \Theta + s^2 \Sigma m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7b).$$

Führen wir dann noch die Trägheitshalbmesser k und k' durch

(7a) bzw. $\Theta' = k'^2 \Sigma m$ ein, so erhalten wir auch

$$k'^2 = k^2 + s^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7c),$$

d. h. der Trägheitshalbmesser in bezug auf einen beliebigen Punkt ist die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten der Schwerpunktsabstand und der Trägheitshalbmesser in bezug auf den Schwerpunkt bilden. Gleichzeitig erkennt man aus (7b), da s^2 nur positiv sein kann, daß das Trägheitsmoment in bezug auf den Schwerpunkt des Systems das kleinste aller möglichen Trägheitsmomente sein muß.

Ist die Massenverteilung eine kontinuierliche, so erhalten wir, unter m die Gesamtmasse verstanden, an Stelle von (7a) analog den Ausdrücken für das statische Moment in § 19

$$\Theta = mk^2 = \int r^2 dm \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

und daher für eine mit Masse gleichförmig belegte Linie s bzw. Fläche F unter Wegfall der Massenbelegung für die Einheit

$$sk^2 = \int r^2 ds; \quad Fk^2 = \int r^2 dF \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8a).$$

Eine entsprechende Formel kann man auch für das Volumen aufstellen, wenn dieses in lauter Elementarscheiben normal zu einer Drehachse zerlegt wird. Das Trägheitsmoment des Volumens ergibt sich dann als die Summe der Scheibenträgheitsmomente, die wieder durch Integration gewonnen wird.

1. Beispiel. Heben sich die an einem Massensystem oder starren Körper wirkenden äußeren Kräfte auf, so verschwinden mit der Resultante auch deren Komponenten ΣX und ΣY, so daß nach (2b) der Schwerpunkt des Systems keiner Beschleunigung mehr unterworfen ist. Der Schwerpunkt wird sich in diesem Falle des Kräftegleichgewichts mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig weiter bewegen. Verschwindet außerdem noch das Moment der Resultanten, d. h. wirkt auf das System kein Kräftepaar, so ist nach (6b) infolge des Wegfalls der Winkelbeschleunigung noch eine Rotation mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um den geradlinig fortschreitenden Schwerpunkt möglich.

Die Explosion einer Granate erfolgt durch die Wirkung innerer Kräfte, welche auf die Bewegung des Systems als Ganzes ohne Einfluß sind. Erfolgt also die Explosion vor dem Aufschlagen in der Bahn, so bewegt sich der Schwerpunkt — wenn von der Wirkung der Luft abgesehen wird — unter dem Einfluß der Schwere in der

ursprünglichen Wurfparabel weiter, trotzdem die einzelnen Splitter hiervon ganz verschiedene Bahnen beschreiben.

2. Beispiel. Eine zylindrische Walze vom Radius a, der homogen verteilten Masse m und dem Trägheitshalbmesser k rolle eine schiefe Ebene mit dem Neigungswinkel α herab (Fig. 117). Alsdann greift zunächst im Walzenzentrum S als Schwerpunkt das Gewicht $G = mg$ an, von dem aber die zur schiefen Ebene normale Komponente $G\cos\alpha$ durch deren Gegenwirkung aufgehoben wird. Unter dem Einfluß der andern Komponente $G\sin\alpha$ würde dann die Walze einfach abrutschen, wenn sie nicht am Gleiten durch eine Tangentialkraft T an ihrem Berührungspunkt mit der Ebene gehindert würde. Diese von der Rauhigkeit der Oberfläche herrührende Kraft T ist nun ebenfalls nach der Walzenmitte zu verschieben, so daß dort nur noch als treibende Kraft $G\sin\alpha - T$ übrig bleibt. Ist dann v die momentane Schwerpunktsgeschwindigkeit, so hat man

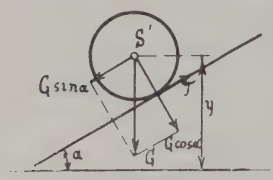

Fig. 117.

$$G\sin\alpha - T = m\frac{dv}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Außerdem aber ist durch die Parallelverschiebung von T ein Kräftepaar mit dem Moment Ta geweckt worden, welches die Winkelgeschwindigkeit der Walze $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ derart vergrößert, daß

$$Ta = mk^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} = mk^2\frac{d\omega}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Da nun die Walze nicht gleitet, sondern sich nur abwälzt, so ist das Wegelement des Schwerpunktes gleich dem Bogenelement des Umfangs, also $ds = a\,d\varphi$ oder nach Division mit dt

$$v = a\omega,$$

womit (10) übergeht in

$$T = m\frac{k^2}{a^2}\frac{dv}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10a).$$

Setzen wir dies schließlich in (9) ein und beachten noch, daß $G = mg$, so folgt

$$g\sin\alpha = \left(1 + \frac{k^2}{a^2}\right)\frac{dv}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

oder nach Multiplikation mit $ds = -\frac{dy}{\sin\alpha}$, wenn y die momentane Schwerpunktshöhe über irgendeinem Horizont bedeutet

$$-g\,dy = \left(1 + \frac{k^2}{a^2}\right)\frac{ds}{dt}\,dv = \left(1 + \frac{k^2}{a^2}\right)v\,dv \quad . \quad . \quad (11a).$$

Dies liefert integriert zwischen den Grenzen y_0 und y

$$g(y_0 - y) = \left(1 + \frac{k^2}{a^2}\right)\frac{v^2 - v_0^2}{2}$$

oder wenn wir die durchfallene Schwerpunktshöhe $y_0 - y = h$ setzen

$$v^2 = v_0^2 + \frac{2gh}{1 + \frac{k^2}{a^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11\,b).$$

Die Endgeschwindigkeit des Walzenschwerpunkts ist demnach infolge der Rotation geringer, als wenn die Walze ohne abzurollen die Höhe h nur durchfallen hätte.

3. Beispiel. An einem um den Punkt O im Schwerpunktsabstande $OS = s'$ drehbaren Körper, einem sog. physischen Pendel (Fig. 118) vom Gewichte $G = mg$ wirkt bei der Neigung φ der Schwerachse gegen die Vertikale $O'Z$ das Moment $M = Gs' \sin\varphi$ derart, daß es den Winkel φ zu verkleinern strebt. Infolgedessen ist mit dem Trägheitshalbmesser k' des Pendels in bezug auf O zu setzen

$$mk'^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -Gs' \sin\varphi = -mgs' \sin\varphi$$

oder

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{gs'}{k^2} \sin\varphi \ , \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

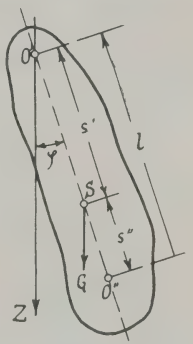

Fig. 118.

Vergleichen wir diese Formel mit Gl. (15) § 16 für das mathematische Pendel von der Länge l, so stimmt sie vollkommen mit dieser überein, wenn wir

$$\frac{k'^2}{s'} = l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12\,a).$$

setzen. Man bezeichnet darum auch diese Länge l als die auf das mathematische Pendel reduzierte Pendellänge. Da weiterhin nach Gl. (17) § 16 die Schwingungsdauer des Pendels für kleine Ausschläge

$$t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{k'^2}{s'g}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12\,b),$$

so kann man bei bekanntem Schwerpunktsabstand s' der Drehachse aus der Schwingungsdauer den Trägheitshalbmesser des Pendels bestimmen. Führt man dann noch durch Gl. (7c) den Trägheitshalbmesser in bezug auf den Schwerpunkt in (12a) ein, so wird daraus

$$k^2 + s'^2 = ls' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

oder nach s' aufgelöst

$$s' = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} - k^2} \quad \ldots \ldots \quad (13a),$$

d. h. es gibt für jedes Pendel zwei Drehpunkte O' und O'' in verschiedenen Abständen vom Schwerpunkt, welche auf dieselbe reduzierte Länge l und damit auf dieselbe Schwingungsdauer führen. Bezeichnet man diese beiden Abstände mit s' und s'', so ist aus (13a)

$$s' + s'' = l \quad \ldots \ldots \quad (13b),$$

d. h. der Abstand der beiden Drehpunkte für dieselbe Schwingungsdauer ist gleich der reduzierten Pendellänge. Ein derartiges, mit zwei meist als Schneiden ausgebildeten Drehpunkten versehenes Pendel, von denen die eine gewöhnlich zur scharfen Einstellung auf die gleiche Schwingungsdauer verschiebbar angeordnet wird, bezeichnet man dann als Reversionspendel.

4. Beispiel. Das polare Trägheitsmoment einer Kreisringfläche mit den Radien r_1 und r_2 (Fig. 119) in bezug auf ihren Mittelpunkt ist nach Gl. (8a) mit $dF = 2\pi r\, dr$ und $F = \pi(r_2^2 - r_1^2)$, gegeben durch

$$\Theta = \pi(r_2^2 - r_1^2)\, k^2 = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} r^3\, dr = \frac{\pi}{2}(r_2^4 - r_1^4) \quad \ldots \quad (14),$$

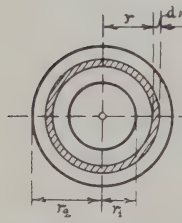

Fig. 119.

woraus

$$k^2 = \frac{1}{2}\frac{r_2^4 - r_1^4}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{1}{2}(r_2^2 + r_1^2) \quad (14a)$$

resultiert.

Allgemeiner haben wir also auch wegen $r^2 = x^2 + y^2$

$$\Theta = \Sigma m r^2 = \Sigma m x^2 + \Sigma m y^2 \quad \ldots \quad (15),$$

worin wir die Ausdrücke

$$\Sigma m x^2 = \Theta_x = k_x^2 \Sigma m, \quad \Sigma m y^2 = \Theta_y = k_y^2 \Sigma m \quad (15a)$$

als die Trägheitsmomente in bezug auf die Y- bzw. X-Achse oder kurz als axiale Trägheitsmomente bezeichnen, denen die Trägheitshalbmesser k_x und k_y derart entsprechen, daß

$$k_x^2 + k_y^2 = k^2 \quad \ldots \ldots \quad (15b)$$

ist. Von diesen axialen Trägheitsmomenten geht man zweckmäßig immer aus, wenn es sich um andere als Kreisringflächen handelt. So erhält man z. B. für das Rechteck (Fig. 120) mit den Seiten a und b und der Fläche $F = ab$ in bezug auf zwei Symmetrieachsen durch den Schwerpunkt O

$$\left.\begin{aligned} \Theta_x = k_x^2\, ab = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} x^2 b\, dx = \frac{a^3 b}{12}, \qquad k_x^2 = \frac{a^2}{12} \\ \Theta_y = k_y^2\, ab = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} y^2 a\, dy = \frac{b^3 a}{12}, \quad k_y^2 = \frac{b^2}{12} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

und daher das polare Trägheitsmoment

$$\Theta = \frac{ab}{12}(a^2 + b^2),\ k^2 = \frac{a^2 + b^2}{12} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16\,a).$$

Das Trägheitsmoment $\Theta_{x'}$ in bezug auf eine um s vom Schwerpunkt entfernte Parallele zur Y-Achse ist dann allgemein mit $x' = s + x$ (Fig. 121)

$$\Theta_{x'} = \Sigma m (s + x)^2 = s^2 \Sigma m + \Sigma m x^2 + 2 s \Sigma m x$$

oder, da das statische Moment $\Sigma m x$ in bezug auf die Schwerachse OY verschwindet,

$$\Theta_{x'} = s^2 \Sigma m + \Sigma m x^2 \quad (17)$$

mit dem Trägheitshalbmesser $k_{x'}$, der sich aus

$$k_{x'}^2 = s^2 + k_x^2 \quad (17\,a)$$

berechnet. Die durch Gl. (7c) dargestellte Beziehung zwischen den polaren Trägheitsradien gilt demnach auch für die axialen, so daß man bei beliebig vorgelegten Achsen immer von den Trägheitsmomenten in bezug auf die parallelen Schwerachsen ausgehen kann.

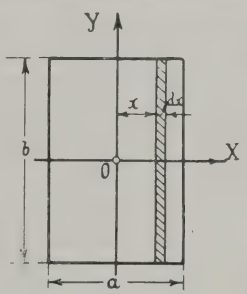

Fig. 120.

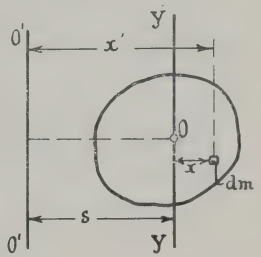

Fig. 121.

§ 21. Die Arbeit.

Wirkt auf einen Massenpunkt m eine Kraft Q und ein dieser entgegengesetzter Widerstand W, so ruft die Resultante beider $Q - W$ eine gleich gerichtete Beschleunigung $q = \frac{dv}{dt}$ hervor, derart, daß

$$Q - W = m \frac{dv}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit dem Wegelement ds des Massenpunktes und beachten, daß $ds = v dt$ ist, so folgt auch

$$Q ds = W ds + m v dv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1\,a)$$

oder integriert zwischen zwei Grenzen s_0 und s, denen die Geschwindigkeiten v_0 und v entsprechen

$$\int_{s_0}^{s} Q\,ds = \int_{s_0}^{s} W\,ds + \frac{m}{2}(v^2 - v_0^2) \quad . \quad . \quad . \quad (1\,\mathrm{b}).$$

Hierin bezeichnen wir die linke Seite als die Arbeit der treibenden Kraft Q, das erste Glied der rechten Seite als die Arbeit des Widerstandes W und den Ausdruck $\frac{m}{2}v^2$ als die Bewegungsenergie oder kinetische Energie der Masse m. Dann besagt die Gl. (1b), daß die Arbeit der treibenden Kraft gleich ist derjenigen des Widerstandes vermehrt um den Zuwachs der kinetischen Energie der unter dem Einfluß beider bewegten Masse.

Die Integrale der Gl. (1b) sind nur ausführbar, wenn die beiden Kräfte Q und W als Funktionen des Weges s gegeben sind, dagegen kommt in dieser Gleichung die Zeit nicht mehr vor, so daß also die Änderung der kinetischen Energie einer bewegten Masse unter dem Einfluß von Kräften, die nur mit dem Orte der Masse, d. h. mit ihrer Lage variieren, selbst eine Funktion der Lagenänderung und unabhängig von der Zeit ist. Dieses Ergebnis wird besonders übersichtlich durch die graphische Verzeichnung der Abhängigkeit der Kraft und des Widerstandes vom Wege s, vgl. Fig. 122, wobei die beiden Integrale in (1b) als Flächen zwischen der Kraft- bzw. Widerstandskurve und der Abszissenachse erscheinen, deren schraffierte Differenz dann ein Maß für die Änderung der kinetischen Energie auf dem Wege $s - s_0$ bildet. In den Schnittpunkten A und B beider Kurven verschwindet nach (1) die Beschleunigung; und daher ist dort die Geschwindigkeit bzw. die kinetische Energie ein Minimum bzw. ein Maximum, wenn zwischen ihnen die Kraftkurve Q über der Widerstandskurve W verläuft.

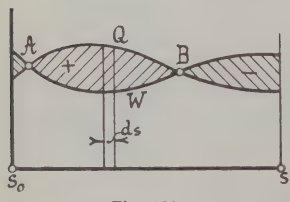

Fig. 122.

Im Falle einer konstanten Kraft ist die Arbeit das Produkt aus der Kraft mit dem durchlaufenen Wege, weshalb man in der Technik als Maßeinheit der Arbeit das Meterkilogramm

(mkg) benutzt, während die Physiker als Einheit das Produkt von 1 Dyne mit 1 cm gewählt haben und als Erg bezeichnen.

Ist die Bewegung des Massenpunktes P eine krummlinige (Fig. 123), so bildet die Resultante R der Kräfte Q und W, die selbst nicht einmal in dieselbe Gerade zu fallen brauchen, im allgemeinen mit den Bahnelementen ds einen Winkel ϑ. Bezeichnen wir die Komponenten der Resultanten mit X und Y, diejenigen der Bahngeschwindigkeit wie früher mit v_x und v_y, so haben wir die beiden voneinander unabhängigen Bewegungsformeln

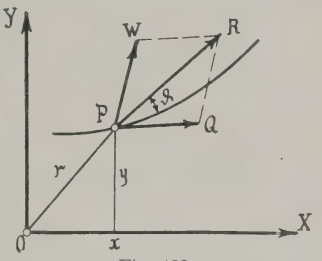

Fig. 123.

$$X = m\frac{dv_x}{dt}, \quad Y = m\frac{dv_y}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Multiplizieren wir die erste mit $dx = v_x dt$, die zweite mit $dy = v_y dt$ und addieren, so folgt

$$X dx + Y dy = m(v_x dv_x + v_y dv_y) \quad . \quad . \quad . \quad (2\,a)$$

oder auch, da

$$\left.\begin{aligned} v_x^2 + v_y^2 &= v^2 \\ v_x dv_x + v_y dv_y &= v\,dv \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

die resultierende Geschwindigkeit von m liefert,

$$X dx + Y dy = m v dv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2\,b).$$

Vergleichen wir diese Formel mit (1 a), so erkennen wir, daß die rechte Seite wieder das Differential der kinetischen Energie der Masse m darstellt, während links die Summe der Arbeitselemente der beiden Kraftkomponenten X und Y steht. Ist ferner mit dem Neigungswinkel α der Kraft gegen die X-Achse

$$X = R\cos\alpha, \quad Y = R\sin\alpha$$

und mit der Bahnneigung τ

$$dx = ds\cos\tau, \quad dy = ds\sin\tau,$$

so wird aus der linken Seite von (2 b) mit $\alpha - \tau = \vartheta$

$$R ds(\cos\alpha\cos\tau + \sin\alpha\sin\tau) = R ds\cos(\alpha - \tau) = R ds\cos\vartheta$$

oder

$$R ds\cos\vartheta = m v dv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

d. h. für die Arbeit einer Kraft kommt nur die in die Bahntangente fallende Komponente in Betracht,

während die Normalkraft zur Bahn keine Arbeit leistet, da in ihrer Richtung keine Verschiebung stattfindet.

Geht die Richtung der Resultanten dauernd durch einen festen Punkt, z. B. den Koordinatenanfang O, so sprechen wir von einer Zentralkraft und erhalten mit dem Fahrstrahl $OP = r$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}, \quad \sin\alpha = \frac{y}{r}, \quad x^2 + y^2 = r^2$$

oder

$$Xdx + Ydy = R\frac{xdx + ydy}{r} = Rdr$$

oder eingesetzt in (2b)

$$Rdr = mvdv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Diese Formel stimmt aber mit $R = mq$ vollständig mit der Gl. (4) § 17 für die Zentralbewegung überein, die mithin unter dem Einflusse einer Zentralkraft verläuft, welche ebenso wie die a. a. O. besprochene Zentralbeschleunigung nur eine Radialfunktion sein kann.

Sind mehrere Massenpunkte vorhanden, so gilt natürlich für jeden derselben die Gl. (2b), wenn X und Y die Komponenten der Resultante aller am Punkte angreifenden Kräfte einschließlich der inneren bedeuten. Sind dagegen die Massenpunkte starr miteinander verbunden, so heben sich die Arbeitselemente je zweier entgegengesetzt gleicher innerer Kräfte auf, da die in die Richtung der starren Verbindungslinie fallenden Verschiebungsprojektionen gleich groß ausfallen. Somit lautet die Energiegleichung eines starren (ebenen) Systems

$$\Sigma(Xdx + Ydy) = \Sigma mvdv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

worin X und Y nur mehr Komponenten äußerer Kräfte darstellen. Befindet sich das System im Gleichgewichtszustande, so verschwindet mit $v = 0$ die ganze rechte Seite von (6) und es bleibt

$$\Sigma(Xdx + Ydy) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6a).$$

Hierin stellen die Differentiale dx und dy, da im Gleichgewichte tatsächlich keine Ortsveränderungen stattfinden, nur mögliche unendlich kleine Verschiebungen dar, die wir darum virtuelle nennen und den Ausdruck (6a) als das Prinzip der virtuellen Verschiebungen bezeichnen. Es besagt dies nichts anderes, als den Ausgleich der virtuellen

Arbeiten der äußeren Kräfte, so daß das Differential ihrer Gesamtarbeit im Falle des Gleichgewichts verschwindet.

Die Energieformel eines starren Körpers gestattet übrigens noch eine bemerkenswerte Umformung durch Einführung der Schwerpunktskoordinaten $x_0\, y_0$, so daß wir nach Fig. 124 für die Koordinaten xy eines beliebigen Massenpunktes m im Schwerpunktsabstande r

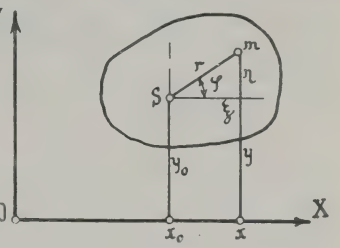

Fig. 124.

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + r\cos\varphi = x_0 + \xi \\ y &= y_0 + r\sin\varphi = y_0 + \eta \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

schreiben dürfen, worin ξ und η die Koordinaten von m in bezug auf zwei zu den ursprünglichen Achsen parallele Schwerachsen bedeuten. Daraus folgt aber

$$\left.\begin{aligned} dx &= dx_0 - r\sin\varphi\, d\varphi = dx_0 - \eta\, d\varphi \\ dy &= dy_0 + r\cos\varphi\, d\varphi = dy_0 + \xi\, d\varphi \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (7\,\text{a}),$$

womit die linke Seite von (6) übergeht in

$$\Sigma(X\,dx + Y\,dy) = dx_0\,\Sigma X + dy_0\,\Sigma Y + d\varphi\,\Sigma(Y\xi - X\eta),$$

oder, da $\Sigma(Y\xi - X\eta) = M$ das Moment der äußeren Kräfte in bezug auf den Schwerpunkt bedeutet, auch kürzer

$$\Sigma(X\,dx + Y\,dy) = dx_0\,\Sigma X + dy_0\,\Sigma Y + M\,d\varphi \quad . \quad (7\,\text{b}).$$

Anderseits ist nach (7 a) durch Division mit dt

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{dx_0}{dt} - \eta\,\frac{d\varphi}{dt} = v_{x_0} - \eta\,\omega \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{dy_0}{dt} + \xi\,\frac{d\varphi}{dt} = v_{y_0} + \xi\,\omega \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (8),$$

wenn wir mit v_{x_0} und v_{y_0} die Komponenten der Schwerpunktsgeschwindigkeit v_0 und mit $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit der Drehung des Körpers bezeichnen. Durch Quadrieren und Addieren von (8) folgt aber wegen $v_x^2 + v_y^2 = v^2$, $v_{x_0}^2 + v_{y_0}^2 = v_0^2$, $\xi^2 + \eta^2 = r^2$

$$v^2 = v_0^2 + r^2\,\omega^2 + 2\,\omega(\xi\,v_{y_0} - \eta\,v_{x_0}) \quad . \quad . \quad . \quad (8\,\text{a})$$

und nach Multiplikation mit m und Summierung über alle Massenpunkte

$$\Sigma m v^2 = v_0^2\,\Sigma m + \omega^2\,\Sigma m\, r^2 + 2\,\omega\, v_{y_0}\,\Sigma m\,\xi - 2\,\omega\, v_{x_0}\,\Sigma m\eta.$$

Hierin verschwinden aber die Größen $\Sigma m\,\xi$ und $\Sigma m\,\eta$ als statische

Momente in bezug auf zwei Schwerachsen und es bleibt unter Einführung des Trägheitsmomentes $\Sigma m r^2 = \Theta$

$$\Sigma m v^2 = v_0^2 \Sigma m + \omega^2 \Theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8\,\text{b}),$$

d. h. die kinetische Energie eines starren Körpers setzt sich aus der kinetischen Energie der im Schwerpunkt konzentriert gedachten und mit der Schwerpunktsgeschwindigkeit bewegten Gesamtmasse sowie einem der Rotation um den Schwerpunkt entsprechenden Betrage, der sog. Rotationsenergie zusammen. Differenzieren wir schließlich die Gl. (8b) und führen sie mit (7b) in die Energieformel (6) ein, so lautet diese auch, indem wir noch für die Komponenten der Resultante aller Kräfte kürzer $\Sigma X = X_0$, $\Sigma Y = Y_0$ schreiben

$$X_0 dx_0 + Y_0 dy_0 + M d\varphi = v_0 dv_0 \Sigma m + \Theta \omega d\omega \; . \quad (6\,\text{b}).$$

Diese Gleichung kann auch noch auf ein ganzes System starrer Körper ausgedehnt werden, da auch hierbei die Arbeit der inneren Kräfte verschwindet. In diesem Falle benutzt man für die linke Seite bequemer die allgemeine Form, wie in (6) und schreibt, unter m die Gesamtmasse eines solchen Körpers mit dem Trägheitsmoment Θ verstanden

$$\Sigma(X dx + Y dy) = \Sigma m v_0 dv_0 + \Sigma \Theta \omega d\omega \quad . \quad (6\,\text{c}).$$

1. Beispiel. Ein Stein von der Masse m und dem Trägheitsmoment $\Theta = m k^2$ in bezug auf seinen Schwerpunkt werde an einem masselosen Faden von der Länge r mit der Winkelgeschwindigkeit ω herumgeschleudert, so daß sein Schwerpunkt in der Kreisbahn die Geschwindigkeit $v_0 = r\omega$ besitzt. Wird plötzlich der Drehpunkt freigegeben, so wirken, wenn wir zunächst von der Schwere absehen, auf den Stein keine äußeren Kräfte, so daß wir aus (6b) die Gleichung erhalten

$$m v_0 dv_0 + \Theta \omega d\omega = 0$$

oder

$$m \frac{v_0^2}{2} + \frac{\Theta \omega^2}{2} = \frac{m}{2} \omega^2 (r^2 + k^2) = \text{Const.} \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Hierin ist aber der Ausdruck $m(r^2 + k^2) = \Theta'$ das polare Trägheitsmoment des Steins in bezug auf den Fadendrehpunkt vor dem Abschleudern, so daß wir die gesamte kinetische Energie auch als Rotationsenergie um diesen Drehpunkt auffassen dürfen. Die Rotation des Steines um seinen Schwerpunkt nach dem Abschleudern erkennt man übrigens leicht an dem Aufwickeln des mitgeführten Fadens.

2. Beispiel. Werfen wir einen an der Erdoberfläche ruhenden Körper von der Masse m auf die Höhe h, so daß er dort die

Geschwindigkeit v besitzt, so ist der zu überwindende Widerstand sein Gewicht $G = mg$ mit einer vertikalen Richtung nach unten, so daß als Widerstandsarbeit nur das Produkt des Gewichtes mit der Projektion der Bahn auf eine Vertikale, d. h. mit der Höhe h selbst in Frage kommt. Mithin ist die dem Körper zu erteilende Arbeit $Gh + \frac{mv^2}{2}$. Mit derselben Arbeit hätten wir den Körper auch auf eine andere Höhe h_1 bringen und ihm dort die Geschwindigkeit c erteilen können, so daß

$$Gh + \frac{mv^2}{2} = Gh_1 + m\frac{c^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

wird. Alsdann sagen wir, daß der Körper in beiden Lagen in bezug auf die Erdoberfläche denselben Arbeits- oder Energieinhalt besitzt und bezeichnen insbesondere die Produkte Gh bzw. Gh_1 als seine potentielle Energie im Gegensatze zu der kinetischen $\frac{mv^2}{2}$ bzw. $\frac{mc^2}{2}$.

Setzen wir dann in die Gl. (10) für das Gewicht $G = mg$ ein, so folgt mit $h - h_1 = y$

$$2g(h - h_1) = 2gy = c^2 - v^2,$$

die uns aus § 16 Beispiel 3 schon bekannte Beziehung zwischen der Geschwindigkeit v und der Steighöhe y auf freier oder gezwungener Bahn unter dem Einfluß der Erdbeschleunigung g bei einer Anfangsgeschwindigkeit c.

3. Beispiel. Am Ende A eines um O rotierenden Stabes $OA = r$ greife drehbar eine Stange $AB = l$ an, deren anderes Ende B auf einer Geraden AB durch O hin- und hergleiten kann, während OA sich um O dreht (Fig. 125). Lassen wir dann in der Richtung $OB = x$ eine Kraft Q bei B wirken, so wird dieser an A durch eine tangentiale Gegenkraft W das Gleichgewicht gehalten, die wir nach dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen bestimmen wollen. Bezeichnen wir den Drehwinkel der sog. Kurbel r gegen die Gleitbahn OB mit φ, so entspricht einer Verkürzung von x um dx der Drehwinkel $d\varphi$, so zwar, daß nach Gl. (6a)

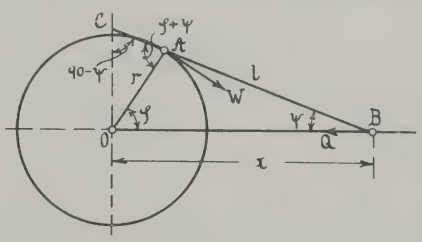

Fig. 125.

$$Q\,dx + W r\,d\varphi = 0$$

oder

$$W = -\frac{Q\,dx}{r\,d\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

ist. Anderseits aber haben wir in dem Dreieck OAB mit dem Winkel $OBA = \psi$

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi + l\cos\psi \\ r\sin\varphi &= l\sin\psi \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12),$$

oder

$$\frac{dx}{r\,d\varphi} = -\sin\varphi - \frac{l}{r}\sin\psi\,\frac{d\psi}{d\varphi}$$

$$r\cos\varphi = l\cos\psi\,\frac{d\psi}{d\varphi},$$

so daß

$$\frac{dx}{r\,d\varphi} = -\sin\varphi - \frac{\sin\psi\,\cos\varphi}{\cos\psi} = -\frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos\psi}$$

und damit

$$W = Q\,\frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos\psi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11\,a)$$

wird. Verlängern wir nun die Gerade AB bis zum Schnittpunkt C mit der Vertikalen in O, so ist in dem Dreieck OAC der Winkel $OAC = \varphi + \psi$, $OCA = 90^0 - \psi$, also

$$\frac{W}{Q} = \frac{\sin(\varphi+\psi)}{\sin(90^0-\psi)} = \frac{OC}{OA},$$

wonach die gesuchte Kraft W bequem konstruiert werden kann.

4. Beispiel. Über eine Rolle mit dem Radius a und dem polaren Trägheitsmoment $\Theta = m k^2$ wird ein Faden mit zwei Gewichten $G_1 = m_1 g > G_2 = m_2 g$ gelegt (Fig. 126). Alsdann beginnt sich die Rolle mit der Winkelgeschwindigkeit ω infolge der Abwärtsbewegung des größeren Gewichtes zu drehen. Wenn das Seil nicht gleiten soll, so ist die Geschwindigkeit beider Gewichte $v = a\omega$ und wir erhalten bei einer Senkung von G_1 um dh, der eine ebenso große Steigung von G_2 entspricht, nach (6c)

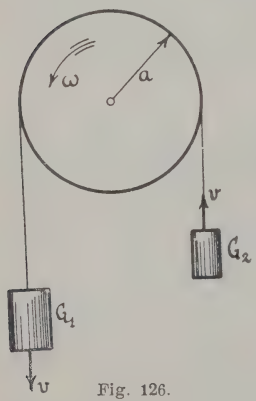

Fig. 126.

$$(G_1 - G_2)\,dh = (m_1 + m_2)\,v\,dv + m k^2\,\omega\,d\omega$$

oder

$$(m_1 - m_2)\,g\,dh = \left(m_1 + m_2 + m\,\frac{k^2}{a^2}\right) v\,dv \quad (13)$$

und integriert bei anfänglichem Ruhezustand

$$2gh = \frac{m_1 + m_2 + m\,\dfrac{k^2}{a^2}}{m_1 - m_2}\,v^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13\,a).$$

Dividieren wir (13) mit dt und beachten, daß $dh = v\,dt$ ist, so folgt schließlich für die Beschleunigung des Gewichts

$$\frac{dv}{dt} = g\,\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + m\,\dfrac{k^2}{a^2}}$$

eine Formel, die man an der sog. Atwoodschen Fallmaschine leicht experimentell prüfen kann.

5. Beispiel. Treffen zwei Körper mit den Massen m_1 und m_2 mit verschiedenen Geschwindigkeiten v_1 und v_2 zusammen, so findet eine plötzliche Geschwindigkeitsänderung beider statt, die wir als Stoß bezeichnen. Da während der Berührung die Körper entgegengesetzt gleiche Kräfte aufeinander ausüben, so besteht unter Vernachlässigung der Wirkung äußerer Kräfte während der sehr kurzen Stoßdauer zunächst die Gleichung

$$m_1 \frac{dv_1}{dt} + m_2 \frac{dv_2}{dt} = 0$$

oder nach Weglassung des gemeinsamen Nenners dt und Integration

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14),$$

worin v_1' und v_2' die Geschwindigkeiten nach dem Stoße sein mögen. Das Produkt mv bezeichnet man auch als die Bewegungsgröße, so daß also beim Stoße die Summe der Bewegungsgrößen keine Änderung erfährt.

Die Formel (14) reicht nun offenbar nicht aus, die beiden Unbekannten v_1' und v_2' zu bestimmen, vielmehr ist hierzu noch eine zweite Bedingung erforderlich. Eine solche ergibt sich aus der Forderung, daß während des Stoßvorgangs keine Energie verloren gehen soll, wofür wegen der Vernachlässigung äußerer Kräfte nur die kinetische Energie beider Massen zusammen in Frage kommt. Alsdann sprechen wir von einem elastischen Stoße und haben mit Weglassung des Nenners 2

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

Schreiben wir die beiden Gleichungen in der Form

$$m_1 (v_1 - v_1') = m_2 (v_2' - v_2)$$
$$m_1 (v_1^2 - v_1'^2) = m_2 (v_2'^2 - v_2'^2),$$

so folgt durch Division

$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

und in Verbindung mit (14)

$$\left.\begin{aligned} v_1' &= \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2} \\ v_2' &= \frac{(m_2 - m_1) v_2 + 2 m_1 v_1}{m_1 + m_2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

Trifft z. B. ein Elfenbeinball auf einen andern von derselben Masse, so hat man mit $m_1 = m_2$,

$$v_1' = v_2, \quad v_2' = v_1$$

d. h. die Bälle tauschen ihre Geschwindigkeiten aus, wovon man beim Billardspiel häufig Gebrauch macht.

Trifft die eine Masse m_1 auf eine feste Wand, so dürfen wir diese als Bestandteil einer unendlich großen Masse betrachten, also $m_2 = \infty$ und $v_2 = 0$ setzen, womit aus (17)

$$v_1' = -v_1$$

d. h. ein einfaches Rückprallen mit derselben Geschwindigkeit folgt.

Trifft der Ball die feste Wand in schräger Richtung, so können wir die Geschwindigkeit vor den Stoß in eine Normal- und eine Parallelkomponente zur Wand zerlegen, von denen die letztere (wenn wir keine Reibung annehmen) durch den Stoß unbeeinflußt bleibt. Die erstere erfährt dagegen nach dem Vorstehenden lediglich eine Umkehrung, so daß also der Körper nach dem Stoße die Wand mit einer gleich großen Geschwindigkeit auf der anderen Seite der Berührungsnormalen also analog dem gespiegelten Lichtstrahl mit demselben Neigungswinkel verläßt.

6. Beispiel. Im Gegensatz zu dem elastischen steht der unelastische Stoß, nach dem die mit verschiedener Geschwindigkeit zusammentreffenden Körper mit einer gemeinsamen Geschwindigkeit v sich weiter bewegen, also wie zwei Lehmkugeln aneinander haften bleiben. Alsdann lautet die auch hierfür gültige Gl. (14)

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18),$$

woraus sich die gemeinsame Endgeschwindigkeit zu

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18a)$$

berechnet. Da weiterhin die kinetische Energie beider Körper vor dem Stoße $\frac{m_1}{2} v_1^2 + \frac{m_2}{2} v_2^2$ war, nach dem Stoß aber $\frac{m_1 + m_2}{2} v^2$ ist, so geht durch den Stoß die Energiedifferenz

$$L = \frac{m_1}{2} v_1^2 + \frac{m_2}{2} v_2^2 - \frac{m_1 + m_2}{2} v^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

verloren. Setzen wir hierin den Wert für v aus (18a) ein, so wird dieser Energieverlust

$$L = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{(v_1 - v_2)^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19a),$$

also proportional dem Quadrate der Geschwindigkeitsdifferenz beider Körper vor dem Stoße. Der Versuch lehrt nun, daß dieser Energiebetrag teils zur Formänderung, anderenteils aber zur Erwärmung beider Körper gedient hat, also in Wirklichkeit nicht verschwunden ist. Aus diesem Grunde betrachtet man auch die Wärme nur als eine andere Form der Energie, die u. a. auch da in Erscheinung tritt, wo die Bewegung scheinbar starrer Körper durch Reibung an anderen oder durch den Widerstand in Flüssigkeiten oder Gasen (z. B. der Luft) gehemmt wird. Die hierdurch geweckten sog. Widerstandskräfte unterscheiden sich von den bisher betrachteten treibenden Kräften dadurch, daß sie niemals eine Beschleunigung, sondern nur in der Bewegungsrichtung eine Verzögerung hervorrufen können.

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
515L88E C001
EINFUHRUNG IN DIE ELEMENTE DER HOHEREN M
3 0112 017233898